



Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

ESTUDO DOS MODOS DE COLAPSO DE VASOS DE PRESSÃO

Gustavo Amarante Furtado

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador:

Prof. Dr. Nestor Alberto Zouain Pereira

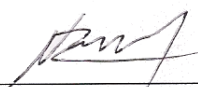
Rio de Janeiro
Abril de 2013

ESTUDO DOS MODOS DE COLAPSO DE VASOS DE PRESSÃO

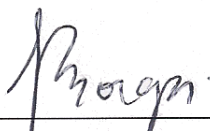
Gustavo Amarante Furtado

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO

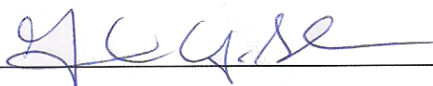
Aprovado por:



Prof. Nestor Alberto Zouain Pereira, D.Sc.
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Orientador



Prof.ª Lavinia Maria Sanabio Borges, D.Sc.
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prof. José Luis Lopes da Silveira, D.Sc.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL

ABRIL de 2013

Furtado, Gustavo Amarante

Estudo dos Modos de Colapso de Vasos de Pressão / Gustavo Amarante Furtado - Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2013.

xiii, 57 p. il; 29,7 cm.

Orientador: Nestor Alberto Zouain Pereira

Projeto de Graduação - UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 56-57.

1. Vasos de Pressão 2. Colapso Plástico 3. Elementos Finitos I. Pereira, Nestor Alberto Zouain. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Mecânica. III. Título.

À humanidade



Agradecimentos

À minha família, em especial ao meu pai e a minha mãe. E também à minha irmã.

À minha namorada pelas valorosas e construtivas críticas.

Aos meus amigos pelo apoio ou não, pelo menos nos divertimos.

A todos aqueles que me ajudaram com o L^AT_EX.

Ao meu orientador, por ter me orientado.

À Ponte do Saber pelas horas a mais que pude dedicar a este projeto.

Aos motoristas e trocadores das linhas 485 e 486 por me darem boas histórias para contar.

Ao CNPQ, à FAPERJ, ao Banco Itaú, ao Governo Francês, ao Centro de Pesquisas em Eletricidade (CEPEL) e à Vallourec Manesmann Tubes do Brasil por terem me alimentado em troca de resultados. Ao meu pai e à minha mãe, novamente, por terem me alimentado só por amor.

A todos os que desenvolveram a tecnologia necessária para que este projeto não fosse apenas uma vaca pintada na parede de uma caverna.

**Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ
como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro
Mecânico.**

Estudo dos Modos de Colapso de Vasos de Pressão

Gustavo Amarante Furtado

Abril de 2013

Orientador: Nestor Alberto Zouain Pereira

Curso: Engenharia Mecânica

A estocagem de fluidos em altas pressões e temperaturas é uma necessidade fundamental de várias atividades industriais como a indústria de extração e processamento de petróleo, processos químicos e de geração de energia além disso, encontra aplicações em hospitais e domésticas. O colapso de vasos de pressão pode causar o vazamento de substâncias tóxicas ou inflamáveis, além de explosões com consequências catastróficas em termos de perdas de vidas humanas e materiais. Erros de projeto são uma das principais causas de acidentes com este equipamento. Neste contexto, simulações por elementos finitos constituem uma ferramenta importante na otimização e melhora deste tipo de projeto. Neste trabalho foram estabelecidos os modos de colapso e as pressões limites elástica e de colapso para vasos de pressão com simetria de revolução e tampo elipsoidal a partir de simulações por elementos finitos. Concluiu-se que mudanças no modo de colapso em função da espessura fazem com que a pressão limite elástica e a pressão de colapso decaiam rapidamente. O possível aparecimento de flambagem pode reduzir ainda mais a resistência do vaso de pressão.

Palavras-chave: Vasos de Pressão, Elementos Finitos, Colapso Plástico.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Analysis of the Collapse Modes of Pressure Vessels

Gustavo Amarante Furtado

April 2013

Advisor: Nestor Alberto Zouain Pereira

Course: Mechanical Engineering

The storage of fluids at high pressure and temperatures is a primary need of many industrial activities including oil extraction and processing, chemical process and energy generation but also for hospitals and domestic use. The collapse of pressure vessels can cause the leak of toxic or inflammable substances and explosions with catastrophic consequences in terms of material and human losses. Faulty design is one of the main causes of accidents with such device and finite elements simulation is an important tool for optimization and improvements of the design. In this work it was established the collapse mechanism, the yield limit pressure and the collapse pressure for pressure vessels with symmetry of revolution and ellipsoidal head by using finite elements method simulation. It was concluded that the change in the collapse mode as the thickness varies causes the yield pressure and collapse pressure decays rapidly. The possibility of buckling may reduce even more the resistance of pressure vessels.

Keywords: Pressure Vessel, Finite Elements, Plastic Collapse.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Objetivo | 3 |
| 3 | Metodologia | 4 |
| 3.1 | Fundamentos Teóricos | 4 |
| 3.2 | Aplicação | 6 |
| 4 | Geração do Modelo Computacional | 9 |
| 4.1 | Geração de Malhas | 9 |
| 4.1.1 | Características da Malha | 9 |
| 4.1.2 | Método Utilizado | 10 |
| 4.1.3 | Implementação | 12 |
| 4.1.4 | Exemplos | 14 |
| 4.2 | Cargas | 16 |
| 5 | Validação do <i>Software</i> | 19 |
| 6 | Comparação de Resultados | 23 |
| 6.1 | Parâmetros e Nomenclatura | 23 |
| 6.2 | Malha e Refinamento | 23 |
| 6.3 | Reprodução de Resultados | 25 |
| 6.4 | Convergência e Comparação dos Resultados | 27 |
| 7 | Análise de Resultados | 31 |
| 7.1 | Mecanismos de Colapso | 31 |
| 7.1.1 | Rótula Plástica | 34 |
| 7.1.2 | Deformação no Centro do Tampo | 38 |
| 7.1.3 | Colapso no Cilindro | 40 |
| 7.1.4 | Diagrama de Modos de Colapso | 42 |
| 7.2 | Variação da Pressão Limite Elástica | 43 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 7.2.1 | P_E^* para baixas razões de aspecto | 43 |
| 7.2.2 | P_E^* para altas razões de aspecto | 44 |
| 7.3 | Variação da Pressão Limite de Colapso | 45 |
| 7.3.1 | P_C^* para baixas razões de aspecto | 46 |
| 7.3.2 | P_C^* para altas razões de aspecto | 47 |
| 7.4 | Relação entre P_E^* e P_C^* | 48 |
| 7.5 | Colapso por Flambagem | 51 |
| 8 | Conclusão | 55 |
| | Referências Bibliográficas | 56 |

Lista de Figuras

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 1.1 | Exemplos de vasos de pressão | 2 |
| Figura 3.1 | Fluxograma do projeto | 7 |
| Figura 3.2 | Fluxograma do processo computacional | 8 |
| Figura 4.1 | Ordenamento dos nós | 10 |
| Figura 4.2 | Representação esquemática do mapeamento. A linha meridiana é a tracejada. | 11 |
| Figura 4.3 | Malha de cobertura do quadrado unitário com $N_U = 4$ e $N_V = 2$. . . | 13 |
| Figura 4.4 | Malha de um perfil de um quarto de elipse sem parametrização. . . | 15 |
| Figura 4.5 | Malha uniforme para um perfil de um quarto de elipse. | 15 |
| Figura 4.6 | Malha de um perfil de um quarto de elipse com refinamento. | 16 |
| Figura 4.7 | Malha com cargas aplicadas nos nós. As cargas correspondem a uma pressão uniforme. | 18 |
| Figura 5.1 | Perfil de um quarto de esfera e seus graus de liberdade usado na simulação. | 20 |
| Figura 5.2 | Comparação entre os valores de P_E^* para a solução analítica e os resultados para diferentes malhas | 21 |
| Figura 5.3 | Comparação entre os valores de P_C^* para a solução analítica e os resultados para diferentes malhas | 22 |
| Figura 6.1 | Desenho esquemático mostrando os parâmetros geométricos de um vaso cilíndrico com tampo elipsoidal. | 24 |
| Figura 6.2 | Detalhes de uma malha uniforme com a espessura dividida em três camadas. | 24 |
| Figura 6.3 | Diferentes densidades de malha para um mesmo perfil em função da plastificação. | 25 |
| Figura 6.4 | Comparação da malha uniforme com a malha refinada para parâmetros $a/b = 4$ e $a/e = 10$ | 26 |
| Figura 6.5 | Deformadas para diferentes comprimentos de l com parâmetros $a/b =$ 2 e $a/h = 10$ | 29 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 7.1 | Deformadas para $a/b = 2$ | 32 |
| Figura 7.2 | Deformadas para $a/b = 2,5$ | 32 |
| Figura 7.3 | Deformadas para $a/b = 3$ | 33 |
| Figura 7.4 | Deformadas para $a/b = 4$ | 33 |
| Figura 7.5 | Plastificação para o perfil com $a/b = 4$ e $a/h = 25$. | 34 |
| Figura 7.6 | Três simulações com $a/b = 2$ e $a/h = 120$. A formação de rótula plástica só surge na segunda remalhagem. | 35 |
| Figura 7.7 | Simulações com $a/b = 2$ e $a/h = 115$. A espessura mais fina para a qual não se observou formação de rótula plástica. | 35 |
| Figura 7.8 | Plastificação e deformada do perfil com $a/b = 3$ e $a/h = 40$, o perfil mais espesso onde somente a rótula plástica ocorre. | 36 |
| Figura 7.9 | Plastificação e deformada do perfil com $a/b = 3$ e $a/h = 37$. | 36 |
| Figura 7.10 | Plastificação e deformada do perfil para $a/b = 2,5$ e $a/h = 70$. | 37 |
| Figura 7.11 | Plastificação e deformada do perfil para $a/b = 4$ e $a/h = 55$. | 37 |
| Figura 7.12 | Visualização tridimensional da deformada para $a/b = 2$ e $a/h = 115$. | 38 |
| Figura 7.13 | Deformadas para diferentes remalhagens com $a/b = 1,8$ e $a/h = 100$. | 39 |
| Figura 7.14 | A variação da deformada com a variação da espessura. | 40 |
| Figura 7.15 | Condição indeformada e deformada para $a/b = 1,5$ e $a/h = 100$. | 41 |
| Figura 7.16 | Condição indeformada e deformada para um vaso com $a/b = 2$ e $a/h = 13$. | 41 |
| Figura 7.17 | Modos de Colapso em função da razão de aspecto e espessura. As simulações foram feitas com $a = l$. | 42 |
| Figura 7.18 | Pressão limite elástica adimensional P_E^* para razões de aspecto 1,5, 1,8, 2 e o limite para um cilindro fechado espesso. | 44 |
| Figura 7.19 | Pressão limite elástica adimensional P_E^* para razões de aspecto 2,5, 3 e 4. | 45 |
| Figura 7.20 | Pressão de colapso adimensional P_C^* para razões de aspecto 1,5, 1,8, 2 e a aproximação limite para um cilindro fechado fino. | 46 |
| Figura 7.21 | Pressão de colapso adimensional P_C^* para razões de aspecto 2,5, 3 e 4. | 48 |
| Figura 7.22 | Diagrama de limite elástico e colapso para uma viga reta de seção retangular. | 49 |
| Figura 7.23 | Razão entre as pressões limite elástica e de colapso, P_C^*/P_E^* para razões de aspecto 1,5, 1,8 e 2. | 50 |
| Figura 7.24 | Razão entre as pressões limite elástica e de colapso, P_C^*/P_E^* para razões de aspecto 2,5, 3 e 4. | 50 |
| Figura 7.25 | Detalhe de um vaso de pressão com tampo torisférico que sofreu flambagem. | 51 |

| | |
|--|----|
| Figura 7.26 Parâmetros geométricos de um tampo torisférico e a comparação de um tampo torisférico e seu equivalente elipsoidal. | 53 |
| Figura 7.27 Pressão de colapso e de flambagem para $AR = 3$ | 54 |
| Figura 7.28 Diagrama de modos de colapso incluindo flambagem. | 54 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------------|--|----|
| Tabela 5.1 | Características das Malhas | 21 |
| Tabela 6.1 | Comparação do Limite de Escoamento P_E^* para $a/b = 4$ | 26 |
| Tabela 6.2 | Comparação do Limite de Colapso P_C^* para $a/b = 4$ | 27 |
| Tabela 6.3 | Comparação das pressões P_E^* para diferentes formatos e espessuras. | 28 |
| Tabela 6.4 | Comparação das pressões P_C^* para diferentes formatos e espessuras. | 29 |
| Tabela 6.5 | Variação de P_E^* e P_C^* em função de l para $a/b = 2$ e $a/h = 10$. . . | 30 |
| Tabela 7.1 | Parâmetros geométricos para um tampo torisférico equivalente. | 52 |

1

Introdução

Vasos de pressão são equipamentos que servem a armazenar fluidos em pressões diferentes da pressão exterior.

Eles encontram aplicações em diversas indústrias como a de geração de energia elétrica, petróleo e outras indústrias químicas. Além disso, o armazenamento de gás comprimido tem utilidade doméstica, em hospitais e laboratórios.

Em geral estes equipamentos são feitos de material metálico mas também podem ser construídos em concreto e mais recentemente de materiais compósitos.

O formato em geral é cilíndrico com as extremidades, denominadas tampos, em formatos de hemisfério, semi-elipsoides (chamados somente de elipsoides) ou torisféricos. Outros formatos encontrados são vasos esféricos e toroidais.

Historicamente, a necessidade de armazenar fluidos em altas pressões e as tecnologias associadas datam desde a revolução industrial [15]. O desenvolvimento inicial de vasos de pressão esteve fortemente associado ao desenvolvimento de caldeiras e à necessidade de gerar potência mecânica a partir de calor.

O colapso de vasos de pressão pode ter consequências catastróficas em danos materiais e perda de vidas humanas. O pior acidente já registrado custou 1238 vidas quando a caldeira pressurizada de um navio explodiu causando seu naufrágio, em 1865 nos Estados Unidos [15]. Somente na década de 2000, acidentes com vasos de pressão causaram 127 mortes em todo o mundo [11]. Ainda, segundo [11] erros de projeto dos vasos de pressões estão entre as principais causas de acidentes. Isso evidencia a necessidade de aumentar o entendimento das causas de colapso e melhorar a segurança de plantas industriais.

Neste trabalho, foi estudado o modo de colapso de vasos de pressão com corpo cilíndrico e tampo elipsoidal. Foram obtidas as pressões limite elástica e de colapso dos vasos em função da espessura e da excentricidade do elipsoide. Uma análise da possível flambagem complementa os resultados.



(a) Dois vasos de pressão cilíndricos



(b) Fonte: [upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/40/Gaskessel
gr.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/40/Gaskessel_gr.jpg) Acessado em 10 de março de 2013. Vaso de pressão
esférico.

Figura 1.1: Exemplos de vasos de pressão, (a) armazenamento de nitrogênio no Centro de Tecnologia da UFRJ e (b) armazenamento de gás natural na Alemanha.

2

Objetivo

Neste projeto, é feito o estudo do colapso de vasos de pressão com tampos elipsoidais e simetria de revolução por pressão interna, através da simulação por elementos finitos usando-se um modelo axissimétrico.

Vasos de pressão podem ser caracterizados pelo formato de suas extremidades, os tampos, e neste trabalho são estudados os vasos com tampos elipsoidais que são comumente encontrados.

No estudo do colapso espera-se estabelecer o mecanismo com o qual o colapso ocorre para uma variedade de espessuras e excentricidades do elipsoide. Espera-se obter também as pressões que levam ao limite elástico do material do vaso e a pressão que leva ao colapso.

O estudo é feito através de simulação por elementos finitos em modelos bidimensionais usando a simetria de revolução. Para isso é desenvolvido um programa de geração de malhas com elementos triangulares que servem como entrada para os *softwares* de elementos finitos.

3

Metodologia

Nesta sessão será descrita a metodologia adotada no trabalho. Primeiramente serão introduzidos os fundamentos teóricos seguido da maneira como estes fundamentos são aplicados.

3.1 Fundamentos Teóricos

Na mecânica dos sólidos a solução do estado de tensões e deformações de um corpo deformável depende da solução de um sistema de equações diferenciais que pode ser dividido em três partes: um conjunto de equações descreve a condição de equilíbrio do corpo, um segundo conjunto são as equações cinemáticas que relacionam os deslocamentos às deformações e finalmente um terceiro conjunto descreve as relações constitutivas do material que relacionam deformações às tensões.

Às equações, acrescentam-se as condições de contorno que podem ser da forma de tensões e forças prescritas (cargas) aplicadas em partes do corpo e restrições de movimento aplicadas em outras partes.

O equilíbrio de um corpo na ausência de forças volumétricas, cuja geometria, restrições e cargas tenham simetria de revolução é satisfeito quando o estado de tensões satisfaz o sistema abaixo, onde σ denota o tensor de tensões.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.1b)$$

Aqui, z é a direção do eixo de revolução, r é a direção radial e θ a direção circunferencial. A equação (3.1a) assegura o equilíbrio na direção radial e a equação (3.1b) na direção axial. O equilíbrio na direção circunferencial é consequência direta das hipóteses

de simetria.

As equações cinemáticas relacionam os deslocamentos a deformação do corpo. Será notado por ε o tensor de deformação e \mathbf{u} os deslocamentos.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \quad (3.2)$$

Os outros dois componentes do tensor de deformação, $\varepsilon_{\theta z}$ e $\varepsilon_{\theta r}$, são nulos pelas hipóteses de simetria.

Por último, as equações constitutivas relacionam as deformações às tensões, no regime elástico são dadas pela lei de Hooke:

$$E\varepsilon_{rr} = \sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \quad (3.3a)$$

$$E\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}) \quad (3.3b)$$

$$E\varepsilon_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \quad (3.3c)$$

$$E\varepsilon_{rz} = (1 + \nu)\sigma_{rz} \quad (3.3d)$$

As condições de contorno podem ser, por exemplo, restrições de movimento numa dada direção ou cargas aplicadas.

O colapso plástico pode ser descrito pela relação de Saint Venant-Mises. Nela se faz a hipótese de um corpo rígido-plástico, isto é um corpo onde o módulo de Young é muito maior que a tensão limite de escoamento. Isso implica que as deformações elásticas são muito pequenas e podem ser desprezadas, sendo considerada somente as deformações plásticas.

As equações de equilíbrio continuam válidas. As equações cinemáticas relacionam agora as velocidades \mathbf{v} às taxas de deformação do corpo ξ e são:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad , \quad \xi_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} \quad , \quad \xi_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{e} \quad \xi_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad (3.4)$$

As equações constitutivas são:

$$\frac{\xi_{rr}}{H} = \frac{\sigma_{rr} - \bar{\sigma}}{2\sigma_Y} \quad , \quad \frac{\xi_{\theta\theta}}{H} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \bar{\sigma}}{2\sigma_Y} \quad , \quad \frac{\xi_{zz}}{H} = \frac{\sigma_{zz} - \bar{\sigma}}{2\sigma_Y} \quad \text{e} \quad \frac{\xi_{rz}}{H} = \frac{\sigma_{rz}}{2\sigma_Y} \quad (3.5)$$

Onde σ_Y é a tensão limite de escoamento do material, H é o módulo da parte desviatória do tensor taxa de deformação e σ é a parte hidrostática do tensor de tensões.

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_{zz} - \xi_{rr})^2 + (\xi_{rr} - \xi_{\theta\theta})^2 + (\xi_{\theta\theta} - \xi_{zz})^2 + 6\xi_{rz}^2} \quad (3.6a)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \quad (3.6b)$$

Por último tem-se a condição de incompressibilidade das deformações plásticas:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

3.2 Aplicação

O estudo dos modos de colapso foi feito a partir de simulações computacionais por elementos finitos. O modelo utilizado é de um sólido com simetria de revolução. Assim, não foram necessárias as hipóteses de uma superfície fina (teoria de cascas) mas o modelo é mais pesado computacionalmente.

As simulações foram feitas em dois *softwares* de elementos finitos desenvolvidos pelo professor orientador do projeto, Nestor Zouain e outros dois professores do departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ, Lavinia Borges e José Luis Silveira. O algoritmo utilizado é detalhado num artigo pelos mesmos autores dos *softwares* na referência [19] e no capítulo 9 da referência [16]. O primeiro *software*, chamado *Elastic*, calcula a solução numérica do estado de tensões e deformações no regime elástico para um sólido carregado. Ele calcula ainda a carga limite elástica, que será definida a seguir.

No regime elástico e sob a hipótese de pequenas deformações, o estado de tensão resultante é uma função linear das cargas. Uma consequência da linearidade é que se a solução para um conjunto de cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_N aplicadas nos nós $1, 2, \dots, N$ respectivamente é $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ e seja r um escalar qualquer, a solução para o carregamento rQ_1, rQ_2, \dots, rQ_N e com as mesmas condições de contorno será $r\sigma_1, r\sigma_2, \dots, r\sigma_N$. A carga limite elástica é o valor r_E tal que a tensão em algum ponto atinge a tensão equivalente limite de escoamento do material, σ_Y . Neste trabalho será usado o critério de Mises para o limite elástico.

Para se estabelecer a pressão limite elástica do material, isto é, a pressão que leva a tensão em algum ponto a atingir o limite elástico, basta usar como entrada do programa um carregamento gerado por uma pressão unitária. O valor de r_E , que é uma saída do *software*, será então a pressão limite elástica.

As outras saídas do *software*, como o estado de tensões, servem como entrada para o segundo *software* utilizado, chamado *Shkdown*. Nele uma análise limite de *shake-down* é

realizada e se estabelece a carga de colapso do sólido através do cálculo do fator de carga amplificados, os outros resultados são a plastificação do material (medida pelo módulo do tensor da taxa de deformação) e as velocidades de deformação no colapso.

A carga de colapso é análoga à carga limite elástica. Para um carregamento Q_1, Q_2, \dots, Q_N ela é o valor r_C tal que $r_C Q_1, r_C Q_2, \dots, r_C Q_N$ leva o material ao colapso plástico. Isto ocorre quando sem que haja aumento da carga o sólido continua a se deformar indefinidamente.

Estes dois *softwares* eram as principais ferramentas já disponíveis para o trabalho. Foi necessário desenvolver um programa para a geração do modelo computacional que gerasse a malha e os carregamentos correspondentes à pressão atuante. Os detalhes de como isso foi feito estão explicados na sessão 4.

Para a visualização dos resultados de maneira gráfica foi utilizado o *software* livre ParaView. Foi também desenvolvido um pequeno programa para converter a saída das simulações em elementos finitos para o formato de entrada do ParaView. Foi desenvolvido ainda um programa que converte as velocidades no colapso para um formato mais adequado para se usar no texto do projeto.

Com as ferramentas desenvolvidas para geração de modelos e visualização de resultados fez-se uma validação dos *softwares Elastic* e *Shkdown* comparando-se a solução numérica com a solução analítica de um problema. Os resultados desta comparação estão na sessão 5.

A validação dos *softwares* foi satisfatória e foram feitas então simulações com vasos de pressão com tampo elipsoidal e os resultados comparados com outros disponíveis na literatura. Essa comparação está descrita na sessão 6.

O resultado da comparação também foi satisfatório e uma nova série de simulações foram feitas para vasos de pressão com outros parâmetros de excentricidade do tampo elipsoidal e espessuras. Um estudo mais detalhado do modo de colapso e como ele influencia na pressão limite elástica e pressão de colapso. Os resultados do estudo estão na sessão 7.

A linha de trabalho deste projeto pode ser resumida no fluxograma da figura 3.1.

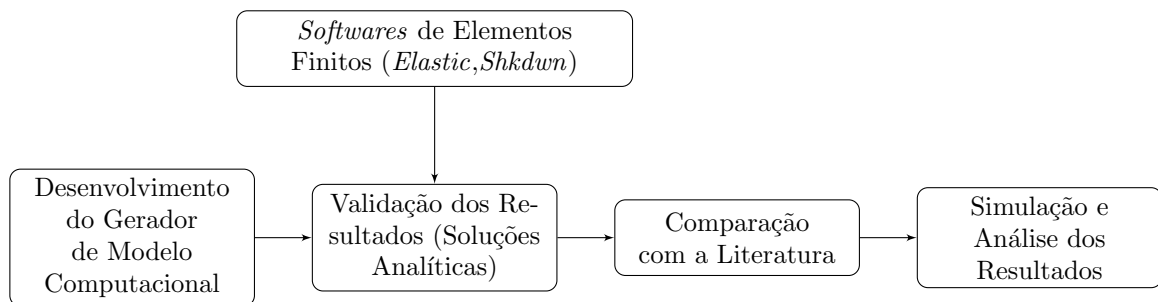


Figura 3.1: Fluxograma do projeto

O número de simulações feitas neste projeto foi bastante alto, mais de 500, por isso uma série de rotinas foi desenvolvida para automatizar certas etapas do processo.

Foram feitas rotinas que chamavam a execução dos *softwares* de elementos finitos, chamavam as rotinas de conversão para as ferramentas de visualização e faziam também a remalhagem do domínio.

A figura 3.2 mostra o fluxograma do processo computacional. Somente a primeira etapa, a entrada dos parâmetros geométricos, e evidentemente a última etapa, análise e interpretação dos dados, eram feitas manualmente.

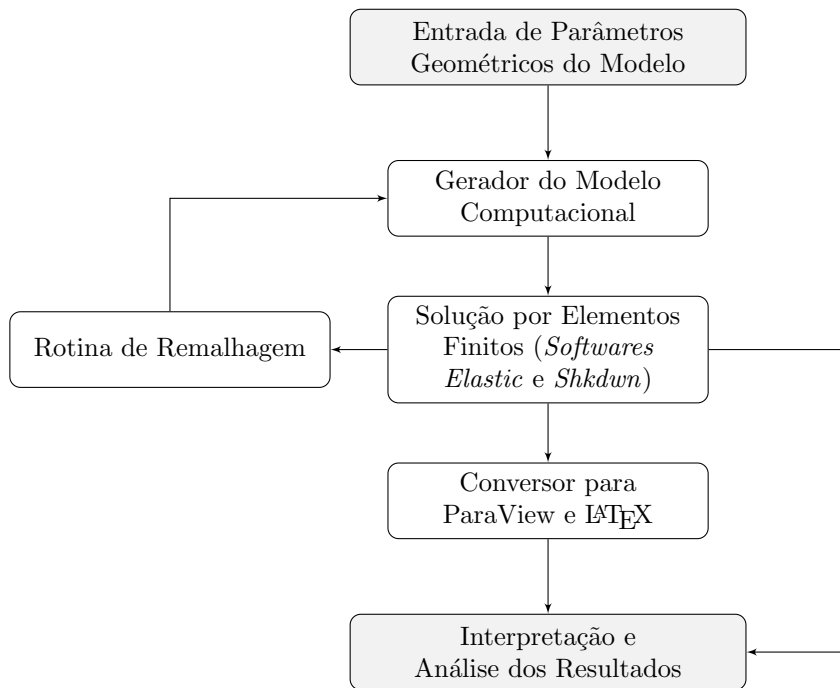


Figura 3.2: Fluxograma do processo computacional

4

Geração do Modelo Computacional

Para a realização das simulações de colapso dos vasos de pressão foi necessário o desenvolvimento de um programa de geração de malhas e de cálculo das cargas externas atuantes no vaso de pressão.

Nesta sessão serão apresentadas as características da malha que será usada nas simulações, as funcionalidades do programa desenvolvido e o método de cálculo das cargas nodais resultantes de uma pressão atuante.

4.1 Geração de Malhas

Apesar de o objetivo ser estudar os vasos de pressão com tampos elipsoidais, foi desenvolvido um programa capaz de gerar qualquer perfil a partir de uma parametrização da linha meridiana.

4.1.1 Características da Malha

A malha utilizada é constituída por triângulos quadráticos, isto é, triângulos definidos por seis pontos (os nós). As arestas dos triângulos são arcos definidos por polinômios quadráticos.

Por sua vez, a malha é definida pelo conjunto dos n nós, $V_n \subset \mathbb{R}^2$, e pelo conjunto das incidências, C_{V_n} . Uma incidência neste caso é um sêxtuplo ordenado que define um elemento indicando quais nós pertencem a ele. O ordenamento dos nós no sêxtuplo não é qualquer: por convenção, os três primeiros valores indicam os vértices do triângulo e os três últimos os nós no meio das arestas. Os vértices devem ser ordenados de forma que se percorra as arestas em sentido antihorário.

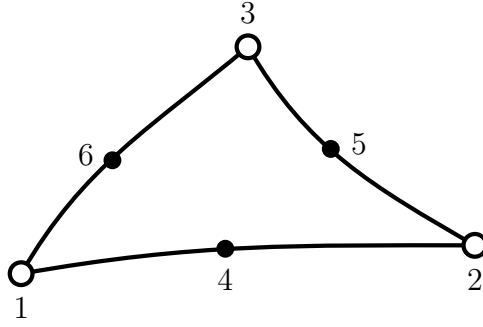


Figura 4.1: Ordenamento dos nós

A figura 4.1 é um exemplo de elemento. A incidência correspondente poderia ser, por exemplo $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ou $(2, 3, 1, 5, 6, 4)$. A incidência $(1, 3, 2, 6, 5, 4)$ está incorreta pois ela indica que se deve percorrer as arestas em sentido horário. Outro exemplo de incidência incorreta é $(1, 2, 3, 4, 6, 5)$ pois ela indica que o nó 5 está na aresta com extremidade nos vértices 3 e 1, o que não é o caso.

Para que a malha seja válida é necessário ainda que as arestas não se interceptem.

4.1.2 Método Utilizado

Como a linha meridiana é, em geral, definida parametricamente o método de cobertura de malha escolhido foi o método de transporte e projeção[3]. Ele se mostrou adequado pois como será mostrado, é fácil definir parametricamente o domínio e o seu contorno.

Neste método, a geração de malha se dá em duas etapas. Primeiramente é feita a cobertura de um domínio simples, no caso, um quadrado unitário $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ por uma malha com nós V_{Q_n} e incidência C_n . Em seguida o quadrado é transformado no domínio de interesse através de um mapeamento. O mapeamento é definido a partir de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u) = (f_r(u), f_z(u))$ e uma espessura h . A função f define a linha meridiana do perfil a ser estudado. O próprio programa criará o mapeamento a partir da função e da espessura dadas.

O mapeamento é uma função $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Será notado por u e v as duas variáveis da função F . Quando variamos u percorremos o domínio paralelo à linha meridiana, quando variamos v percorremos ao longo da espessura, ou seja, paralelo à normal da meridiana.

A figura 4.2 esquematiza o mapeamento. Nela a linha meridiana é representada por uma linha tracejada. A linha pontilhada que no domínio do quadrado unitário é uma linha $u = \text{Constante}$ é mapeada numa linha na direção da espessura no domínio a ser estudado.

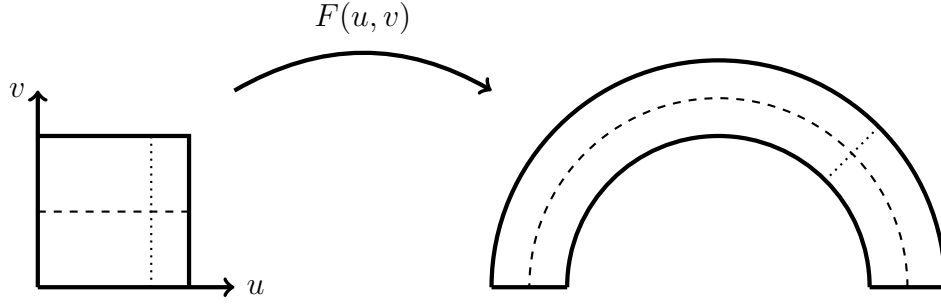


Figura 4.2: Representação esquemática do mapeamento. A linha meridiana é a tracejada.

Para a construção da função de mapeamento, F , é necessário definir a normal unitária, $n(u)$ em cada ponto da curva definida por $(f_r(u), f_z(u))$. Ela pode ser facilmente calculada a partir da derivada de f e aplicando-se uma rotação de 90° :

$$n(u) = \frac{1}{\sqrt{f_r'(u)^2 + f_z'(u)^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r'(u) \\ f_z'(u) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Assim podemos definir um mapeamento da seguinte forma:

$$F(u, v) = f(u) + h \left(v - \frac{1}{2} \right) n(u) \quad (4.2)$$

Uma vez que o mapeamento esteja definido, a malha que cobre a secção pode ser gerada da seguinte maneira: definem-se os nós do domínio a ser estudado transformando os nós do quadrado unitário através do mapeamento, $V_n = F_e(V_{Q_n})$ e mantém-se a incidência C_n . Se a malha no quadrado for uniforme, esse método gera uma malha mais fina quando a derivada $f'(u)$ tiver módulo menor e mais grossa quando for maior.

Para que a malha tenha uma densidade uniforme ao longo de todo o perfil é necessário fazer uma mudança de variável de forma a parametrizar a curva meridiana definida por f pelo comprimento de arco. A mudança de variável é definida por[7]:

$$\hat{u} = s^{-1}(u) \quad (4.3a)$$

$$s(u) = \frac{1}{S} \int_0^u \sqrt{f_r'(\tau)^2 + f_z'(\tau)^2} d\tau \quad (4.3b)$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{f_r'(\tau)^2 + f_z'(\tau)^2} d\tau \quad (4.3c)$$

Aqui $s^{-1}(u)$ indica a inversa de $s(u)$.

Em geral é desejado um refinamento da malha em regiões particulares durante as simulações, mas o refinamento não necessariamente é aquele oriundo do mapeamento sem a mudança de variável citada. Assim foi incluso no programa a possibilidade de usar

uma função peso que indica uma densidade relativa de malha. Onde a função for maior a malha será mais fina.

A função peso $d(u)$ deve ter as seguintes propriedades:

$$d(u) > 0 \quad (4.4a)$$

$$\int_0^1 d(u) du = 1 \quad (4.4b)$$

Observe que dada uma função positiva $\tilde{d}(u)$ qualquer podemos facilmente transformá-la numa função peso adequada dividindo-na por $\int_0^1 \tilde{d}(u) du$.

Faz-se mais uma mudança de variável semelhante a anterior:

$$\hat{u} = D^{-1}(\hat{u}) \quad (4.5a)$$

$$D(\hat{u}) = \int_0^{\hat{u}} d(\tau) d\tau \quad (4.5b)$$

Assim a derivada da função $f(\hat{u})$ tem o módulo igual ao inverso da função peso. Obtemos assim o efeito desejado de uma densidade maior (módulo de f' menor) quando $d(\hat{u})$ for maior.

O programa desenvolvido permite que as três diferentes parametrizações sejam usadas. Em particular, escolhendo-se $d(u) = 1$ a malha ficará uniforme.

4.1.3 Implementação

A implementação do método descrito foi feita no software de computação científica Scilab®.

Para a primeira etapa, geração da malha sobre o quadrado unitário, foi necessário escolher um método de cobertura. Foi verificado na literatura que as simulações em vasos de pressão são feitas com malhas estruturadas e isotrópicas [2, 14, 1]. Apesar de frequentemente se utilizar elementos quadriláteros, o mesmo tipo de estrutura de malha podia ser feito usando-se malhas com elementos triangulares.

Assim, decidiu-se usar uma malha estruturada e isotrópica composta de triângulos retângulos congruentes que além de ser a utilizada neste tipo de simulação é facilmente implementável.

Como entrada do programa tem-se o número de colunas e fileiras em que o quadrado será dividido. A construção dessa malha se dá de maneira semi-automática [3], devido à simplicidade do domínio.

A figura 4.3 ilustra uma cobertura isotrópica com quatro divisões horizontais

($N_U = 4$) e duas verticais ($N_V = 2$).

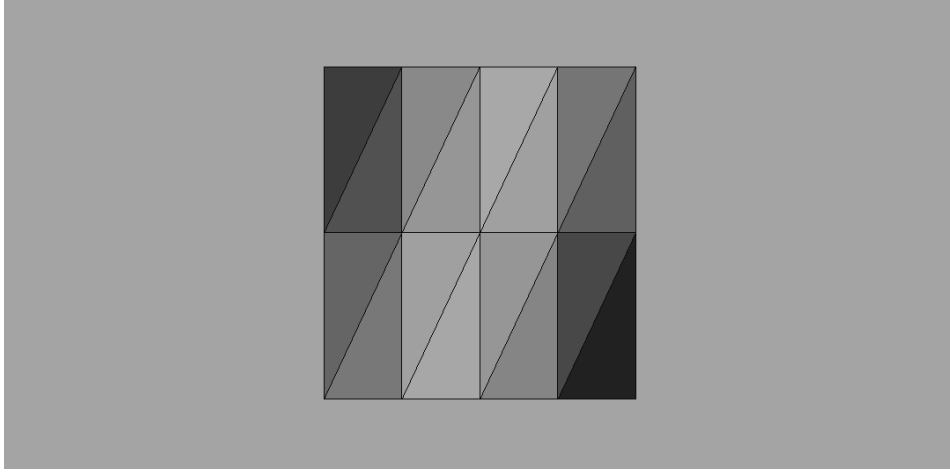


Figura 4.3: Malha de cobertura do quadrado unitário com $N_U = 4$ e $N_V = 2$.

Para a segunda etapa, quando o domínio quadrado é transformado no domínio a ser estudado, a função que fornece a linha meridiana é discretizada e calculada nos pontos $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, 1$. Para as aplicações, foi escolhido $\Delta u = 1/(10N_U)$.

As mudanças de variáveis mencionadas anteriormente são implementadas de maneira discretizada e as integrais substituídas por somatórios. Os valores das funções fora dos pontos de discretização são calculados por interpolação linear.

Por exemplo, a parametrização por comprimento de arco é feita definindo-se os pares $(k\Delta u, s_{k\Delta u})$ calculados da seguinte maneira:

$$s(k\Delta u) \approx s_{k\Delta u} = \frac{1}{S} \sum_{j=0}^k \|f((j+1)\Delta u) - f(j\Delta u)\| \quad (4.6a)$$

$$S = \sum_{j=0}^K \|f((j+1)\Delta u) - f(j\Delta u)\| \quad (4.6b)$$

A inversa discretizada de s é calculada pela interpolação linear dos pares de pontos. O cálculo da normal unitária discretizada foi feito da seguinte maneira:

$$n(k\Delta u) \approx n_{k\Delta u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{f(k\Delta u + \delta) - f(k\Delta u)}{\|f(k\Delta u + \delta) - f(k\Delta u)\|} \quad (4.7)$$

Onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana, ou seja:

$$\|f(k\Delta u + \delta) - f(k\Delta u)\| = \sqrt{[f_r(k\Delta u + \delta) - f_r(k\Delta u)]^2 + [f_a(k\Delta u + \delta) - f_a(k\Delta u)]^2} \quad (4.8)$$

O valor de δ deve ser pequeno em relação ao tamanho do elemento. No programa o valor foi posto em função de N_U , $\delta = (1/N_U)^3$.

Para permitir um refinamento mais eficiente da malha foi usado um método mais complexo para o cálculo da função de densidade de malha $d(u)$ mencionada anteriormente. Frequentemente a escolha da região a ser refinada é feita a partir de simulações anteriores realizadas sobre o mesmo domínio. Assim a entrada do método é uma função positiva, W , definida sobre os nós. O programa então aumentará a densidade de malha onde a função W for maior e reduzirá onde for menor de maneira automática.

Dada então uma função W pode-se construir uma função de densidade de malha conveniente. Primeiramente, inverte-se o mapeamento e leva-se o domínio de volta ao quadrado unitário. Agora sendo u_i e W_i a coordenada u e o valor da função W no nó i definimos a função peso da seguinte forma:

$$d(u) = \frac{\sum_i W_i \mathbf{1}_{[u-\delta, u+\delta]}(u_i)}{\sum_i \mathbf{1}_{[u-\delta, u+\delta]}(u_i)} \quad (4.9)$$

O valor de δ pode ser ajustado de acordo com o resultado desejado. Um valor maior resulta numa função de densidade mais uniforme. O caso extremo de $\delta = 1$ leva a uma função uniforme. Um valor menor de δ torna a função d mais sujeita as oscilações da função W . Para as simulações foi usado $\delta = 1/N_U$.

4.1.4 Exemplos

Aqui são apresentados três exemplos de malha cobrindo um mesmo perfil de quarto de elipse. A elipse é parametrizada pela função $f(u) = [3\cos(\pi u/2), \sin(\pi u/2)]$ e a visualização feita a partir do software ParaView [®].

Na figura 4.4 não foi usada a parametrização por comprimento de arco nem uma função de densidade de malha. Observa-se que a parametrização gera uma malha mais densa no canto inferior direito.

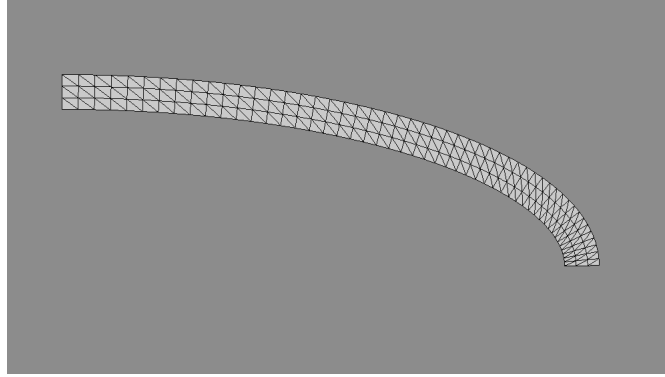


Figura 4.4: Malha de um perfil de um quarto de elipse com parâmetros $N_U = 50$, $N_V = 3$ e $h = 0.2$. Não foi usada uma função de densidade de malha.

Na figura 4.5 foi usada a parametrização por comprimento de arco, ou seja, com função de densidade de malha $d(u) = 1$.

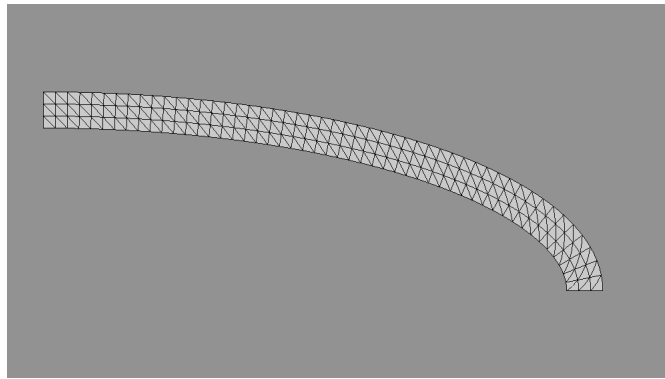


Figura 4.5: Malha de um perfil de um quarto de elipse com parâmetros $N_U = 50$, $N_V = 3$ e $h = 0.2$. A função densidade de malha é constante.

No exemplo da figura 4.6 uma função de densidade de malha foi usada para produzir uma malha exageradamente mais fina na parte central.

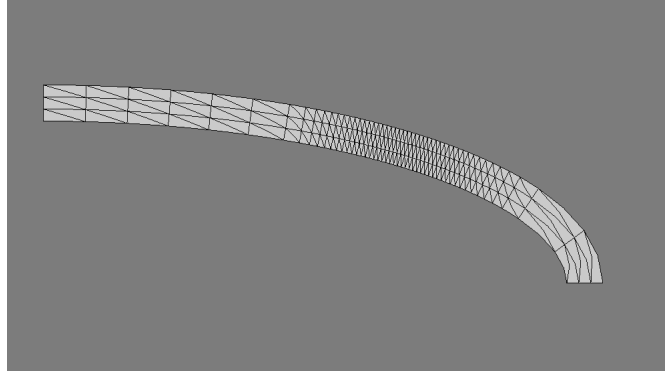


Figura 4.6: Malha de um perfil de um quarto de elipse com parâmetros $N_U = 50$, $N_V = 3$ e $h = 0.2$. A função densidade de malha produz uma malha consideravelmente mais fina no centro.

4.2 Cargas

A única carga considerada e implementada no modelo é a causada pela pressão interna atuando no vaso. Neste trabalho as pressões foram supostas como uniformes em todo o vaso, mas no programa é permitido entrar com um campo de pressão axissimétrico qualquer $p(z, r)$. Onde z é a coordenada axial e r a coordenada radial.

A carga gerada pela pressão numa aresta com extremidades nos vértices i_1 e i_2 é:

$$Q_p = \int_{i_1}^{i_2} 2\pi r p(r, z) \mathbf{n} ds \quad (4.10)$$

O nó central dessa aresta será notado por i_4 , seguindo a convenção utilizada.

Na equação (4.10), \mathbf{n} é a normal unitária apontando para fora, ds é o comprimento de arco elementar. O fator $2\pi r$ no integrando é devido ao aumento da área correspondente a revolução da aresta em torno do eixo de simetria.

A implementação deste cálculo no programa foi feita através da aproximação de $r(s)$, $p(r, z)$ e $\mathbf{n}(s)$ por polinômios, seguindo a recomendação do professor orientador.

Será notado por r_k , z_k e p_k a coordenada radial, coordenada axial e a pressão respectivamente do nó i_k .

As coordenadas dos pontos das arestas serão então aproximada por polinômios do segundo grau, $\tilde{r}(\tau)$ e $\tilde{z}(\tau)$, que interpolam os pontos r_1 , r_4 e r_2 (respectivamente z_1 , z_4 e

z_2) para $\tau = -1$, $\tau = 0$ e $\tau = 1$. Explicitamente os polinômios são:

$$\tilde{r}(\tau) = r_1 \frac{\tau(\tau-1)}{2} + r_4(1-\tau^2) + r_2 \frac{\tau(\tau+1)}{2} \quad (4.11a)$$

$$\tilde{z}(\tau) = z_1 \frac{\tau(\tau-1)}{2} + z_4(1-\tau^2) + z_2 \frac{\tau(\tau+1)}{2} \quad (4.11b)$$

De maneira semelhante, a pressão é aproximada por:

$$\tilde{p}(\tau) = p_1 \frac{\tau(\tau-1)}{2} + p_4(1-\tau^2) + p_2 \frac{\tau(\tau+1)}{2} \quad (4.12)$$

O produto nds pode ser aproximado também por um polinômio, temos que:

$$\tilde{ds}(\tau) = \sqrt{\tilde{r}'(\tau)^2 + \tilde{z}'(\tau)^2} d\tau \quad (4.13a)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}'(\tau)^2 + \tilde{z}'(\tau)^2}} (-\tilde{z}'(\tau), \tilde{r}'(\tau)) \quad (4.13b)$$

E portanto,

$$\tilde{\mathbf{n}}(\tau)ds = (-\tilde{z}'(\tau), \tilde{r}'(\tau))d\tau \quad (4.13c)$$

O valor aproximado da integral se torna:

$$\tilde{Q}_p = \int_{-1}^1 2\pi \tilde{r} \tilde{p}(\tau) (\tilde{z}'(\tau), \tilde{r}'(\tau)) d\tau \quad (4.14)$$

O novo integrando é um polinômio de no máximo quinto grau e pode ser integrado exatamente por quadratura gaussiana com três pontos [13].

Por fim, \tilde{Q}_p é a carga resultante aproximada ao longo de toda a aresta. O *software* de elementos finitos requer que as cargas sejam aplicadas nos nós. As cargas são então distribuídas com a seguinte ponderação:

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\tilde{Q}_p}{6} \quad (4.15a)$$

$$\tilde{Q}_4 = \frac{2\tilde{Q}_p}{3} \quad (4.15b)$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{\tilde{Q}_p}{6} \quad (4.15c)$$

Repare que os vértices, isto é, os nós das extremidades das arestas podem pertencer a outros elementos e portanto a outras arestas da face interna do perfil. Assim a carga total atuante nestes nós será a soma das cargas correspondentes a cada aresta a que o

nó pertença. É importante ressaltar também que a carga calculada para cada nó não é necessariamente normal ao nó já que ela tem a direção da carga resultante na aresta.

A figura 4.7 representa um perfil de vaso com tampo elipsoidal e as cargas causadas pela pressão uniforme aplicadas nos nós. A imagem foi gerada no *software* ParaView e o nó onde a setas que representam as cargas estão centralizadas nos nós onde são aplicadas, portanto os nós da face interna.

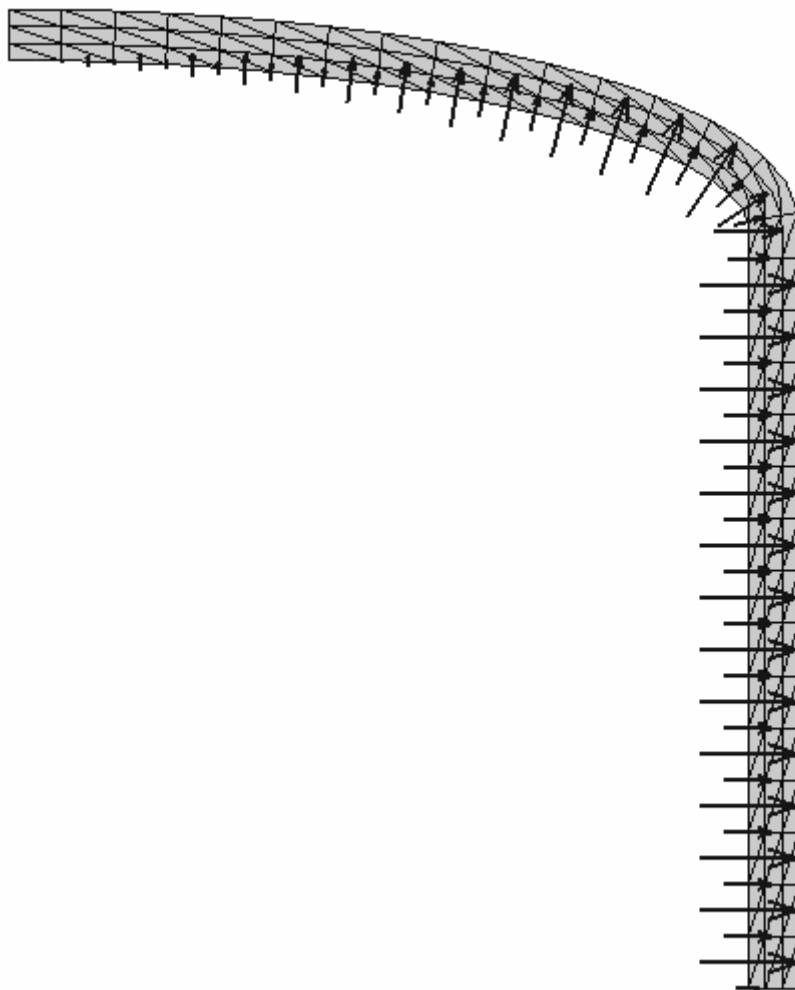


Figura 4.7: Malha com cargas aplicadas nos nós. As cargas correspondem a uma pressão uniforme.

5

Validação do *Software*

Uma vez que o método de geração do modelo foi desenvolvido é necessário fazer a validação dos *softwares* de elementos finitos. Nesta sessão será explicada como foi feita esta validação.

Aqui será introduzida a notação para a pressão limite elástica adimensional:

$$P_E^* = \frac{P_E a}{\sigma_Y h} \quad (5.1)$$

Onde P_E é a pressão limite elástica, σ_Y é a tensão limite de escoamento, a é um comprimento característico do corpo (tipicamente o raio caso seja um corpo com simetria de revolução) e h a espessura de parede.

Pode-se também usar uma espessura adimensional h/a ou o inverso deste valor, a/h que evita um excesso de casas decimais.

De maneira semelhante, pode-se definir a pressão de colapso adimensional:

$$P_C^* = \frac{P_C a}{\sigma_Y h} \quad (5.2)$$

Onde P_C é a pressão de colapso.

Para a validação do *software* a solução numérica encontrada foi comparada com um problema cuja solução analítica é conhecida: uma esfera oca sobre a qual atua uma pressão interna uniforme.

A solução analítica exata deste problema é conhecida e nos fornece uma pressão limite elástica dada por [12]:

$$P_{E,\text{Esfera}}^* = 2 \frac{1 + h^2/12a^2}{(1 + h/2a)^3} \quad (5.3)$$

Para a esfera definimos o valor de a como o raio médio e portanto $a - h/2$ é o raio

interno e $a + h/2$ o raio externo.

As espessuras estudadas estarão tipicamente entre $h/a = 0,1$ ($a/h = 10$) e $h/a = 0,002$ ($a/h = 500$). Aplicando a equação (5.3) para esses valores obtemos que a pressão limite elástica adimensional varia entre 1,729 para $a/h = 10$ e 1,994 para $a/h = 500$. O limite para espessuras finas é 2.

Se o material da esfera está sujeito à lei de escoamento de Mises, a pressão interna, adimensional, que a leva ao colapso é [10]:

$$P_{C,Esfera}^* = 2 \frac{a}{h} \ln \left(\frac{a + h/2}{a - h/2} \right) \quad (5.4)$$

O limite para (5.4) quando a espessura tende a zero é 2. O valor de P_C^* para $a/h = 10$ é 2.0017 e para $a/h = 500$ temos $P_C^* = 2,000$ (o valor só difere de 2 somente na sétima casa decimal).

Devido as simetrias da esfera, a simulação foi feita usando-se apenas um quarto de círculo. A figura 5.1 ilustra o perfil usado nas simulações e seus graus de liberdade. A linha que alterna traço e ponto indica a posição do eixo de revolução, coincidente com uma das extremidades.

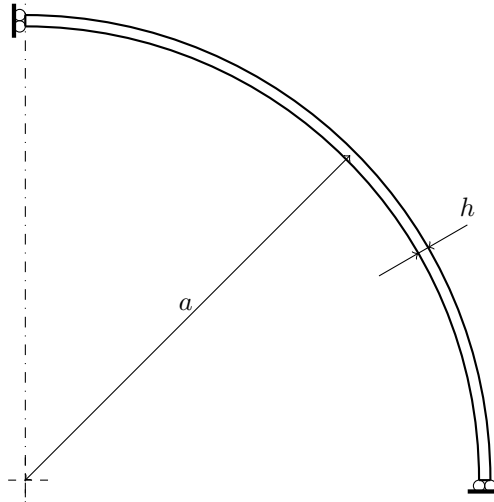


Figura 5.1: Perfil de um quarto de esfera e seus graus de liberdade usado na simulação.

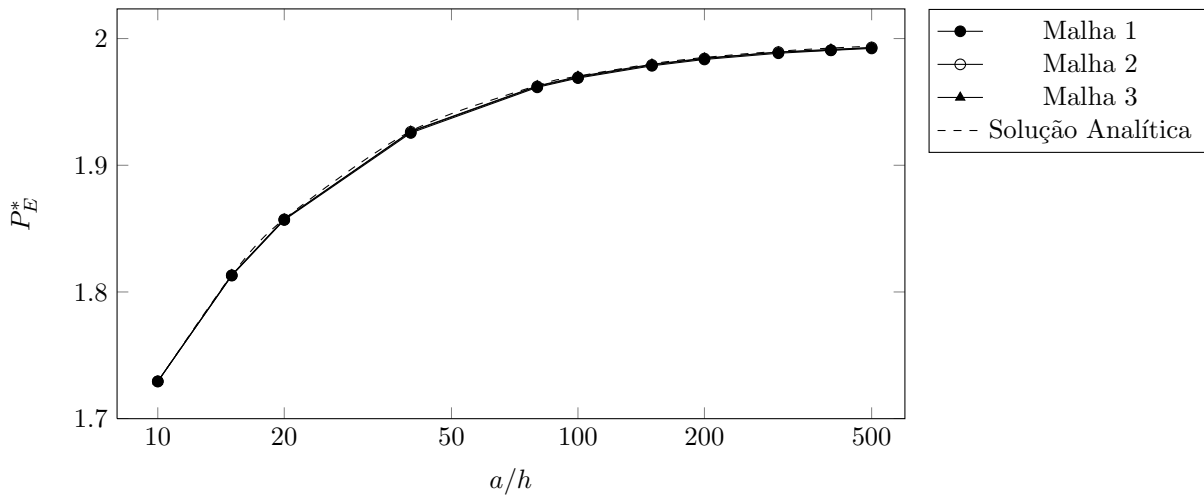
Para cada espessura foram feitas três simulações, a primeira com uma malha uniforme, seguida por duas com malhas com mais elementos e com refinamento baseado nos resultados anteriores. As principais características da malha estão na tabela 5.1

Tabela 5.1: Características das Malhas

| Malha | nós | elementos | N_U | N_V |
|---------|------|-----------|-------|-------|
| Malha 1 | 427 | 180 | 30 | 3 |
| Malha 2 | 1089 | 480 | 60 | 4 |
| Malha 3 | 1629 | 720 | 90 | 4 |

Onde N_U e N_V foram definidos, na sessão anterior e são o número de colunas e fileiras de elementos respectivamente da malha. A fileira é também chamada de camada em simulações com superfícies finas e a importância deste parâmetro será melhor discutida no sessão seguinte sendo pouco importante neste momento.

Os resultados para as pressões limite elásticas e a solução analítica estão plotados na figura 5.2. Os resultados são tão próximos entre si e tão perto da solução analítica que a diferença é imperceptível no gráfico. O erro no cálculo de P_E^* é menor que 0,1% em relação a solução analítica.

**Figura 5.2:** Comparação entre os valores de P_E^* para a solução analítica e os resultados para diferentes malhas

Para a pressão de colapso o erro foi maior e a influência do refinamento da malha é mais evidente. O resultado é mostrado no gráfico 5.3.

O erro para a malha mais grossa chega a 1,5%. Com o refinamento o erro cai para máximo para 0,5%. Em todas as malhas foi verificada a tendência do erro ser maior entre $a/h \approx 20$ e $a/h \approx 80$.

Houve pouca melhora no erro da solução entre a malha 2 e 3 e todas as soluções subestimam a pressão de colapso.

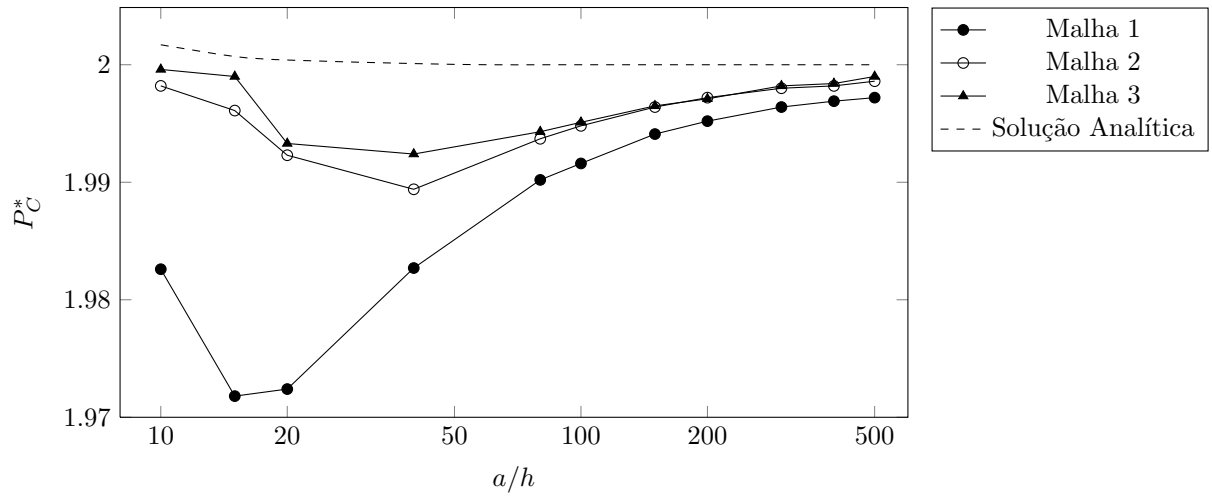


Figura 5.3: Comparação entre os valores de P_C^* para a solução analítica e os resultados para diferentes malhas

De um modo geral a qualidade das soluções numéricas são muito boas e confirmam o bom funcionamento dos *softwares* e das rotinas de geração de malha e remalhagem.

6

Comparação de Resultados

Nesta sessão os resultados de algumas simulações para vasos de pressão cilíndricos com tampo elipsoidal são comparados com os resultados obtidos por Yeon e Robinson [18]. As simulações foram feitas para os mesmos parâmetros do artigo mas com malhas mais refinadas chegando a um número de elementos seis vezes maior.

As tensões limite elástica e de colapso calculadas são em geral superiores, porém próximas às do artigo.

6.1 Parâmetros e Nomenclatura

A figura 6.1 esquematiza os principais parâmetros que caracterizam o perfil de um vaso de pressão cilíndrico com tampo elipsoidal e as condições de contorno cinemáticas do modelo.

A razão a/b é chamada razão de aspecto, abreviada por AR (do inglês, *aspect ratio*). O comprimento l deve ser longo o suficiente para que não interfira nos resultados das simulações na região do tampo. Seguindo Yeon e Robinson, foi usado $l = a$. Entretanto, como será mostrado mais adiante, para algumas combinações de parâmetros esse valor não foi adequado.

As simulações foram feitas para valores de $a/b = 2, 2.5, 3$ e 4 . As razões entre raio e espessura estudadas foram $a/h = 10, 25, 100$ e 300 . O coeficiente de Poisson utilizado foi $\nu = 0,3$ como no artigo.

6.2 Malha e Refinamento

Para cada combinação de parâmetros a/b e a/h foi feita uma série de simulações com remalhagem baseada nos resultados anteriores. A malha inicial era uniforme e con-

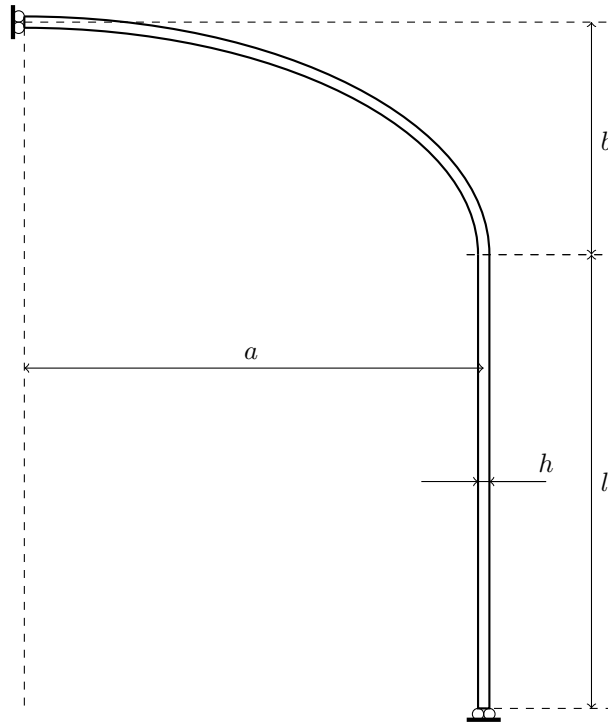


Figura 6.1: Desenho esquemático mostrando os parâmetros geométricos de um vaso cilíndrico com tampo elipsoidal. A extremidade superior esquerda pode se movimentar livremente na direção do eixo e a extremidade inferior se movimenta livremente na direção radial.

tinha 427 nós e 180 elementos triangulares.

Na figura 6.2, pode-se observar um trecho de uma malha sem refinamento e uniforme. Observa-se que ela tem a espessura h dividida em três camadas de elementos. O número de camadas é uma característica importante neste tipo de simulação, o número mínimo de camadas utilizadas foi três.

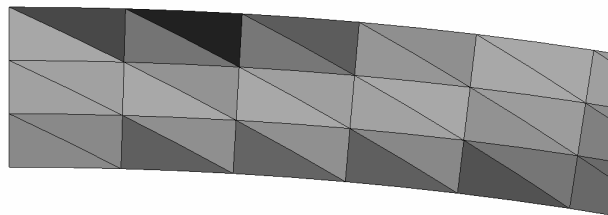


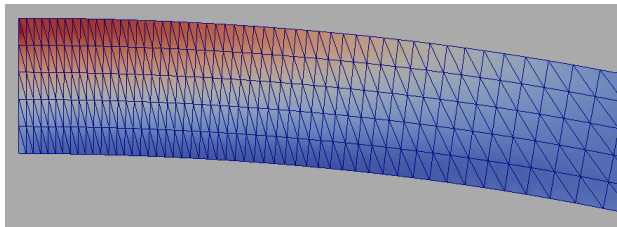
Figura 6.2: Detalhes de uma malha uniforme com a espessura dividida em três camadas.

A função de densidade para o refinamento longitudinal (ao longo do comprimento do perfil) foi a plastificação na região obtida nas simulações anteriores com os mesmos parâmetros geométricos. A fim de evitar um refinamento exagerado causando malhas excessivamente finas em certos pontos e outras regiões excessivamente grosseiras, foi imposto

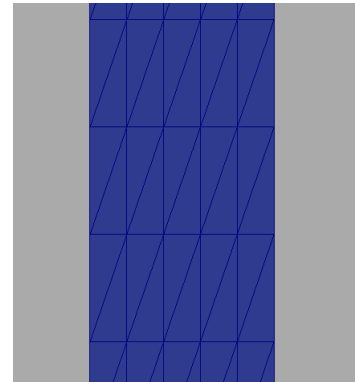
que a densidade máxima longitudinal seria ao menos oito vezes a mínima.

A plastificação foi medida como sendo o módulo do tensor da taxa de deformação.

As figuras 6.3(a) e 6.3(b) mostram o resultado de sucessivos refinamentos para um perfil com parâmetros $a/b = 4$ e $a/h = 10$. Na figura 6.3(a) observa-se um detalhe da região onde ocorre maior plastificação e o colapso. Nesta região a malha é mais fina. Na figura 6.3(b) tem-se a região do cilindro onde a plastificação é muito baixa e a malha mais grossa.



(a) Malha refinada na região de maior plastificação com 5 camadas.



(b) Malha menos refinada na região cilíndrica do vaso.

Figura 6.3: Diferentes densidades de malha para um mesmo perfil em função da plastificação. A cor vermelha indica maior plastificação enquanto a cor azul menor.

6.3 Reprodução de Resultados

Inicialmente tentou-se reproduzir os resultados do artigo. Nele a malha não foi definida de forma precisa, embora tenham sido fornecidas algumas características como o total de elementos e o número de camadas. Foram então construídas malhas com o mesmo número de camadas e com um número próximo de elementos. Nem sempre foi possível obter um número de elementos igual ao do artigo devido a limitações do método de geração de malha.

Em todos os resultados verificou-se a tendência de superestimar a pressão limite de colapso com relação aos resultados do artigo. Para a pressão limite elástica obteve-se resultados semelhantes.

A fim de considerar diferentes tipos de refinamentos que os autores do artigo possam ter utilizado, foram feitas cinco diferentes malhas para cada parâmetro, sendo a primeira uniforme e as seguintes refinadas baseadas nos resultados das anteriores. É importante ressaltar que foi sempre mantido o mesmo número de elementos sendo o

refinamento somente por uma mudança na função de densidade. A figura 6.4 ilustra a primeira e a quinta malha obtidas para os parâmetros $a/b = 4$ e $a/h = 10$.

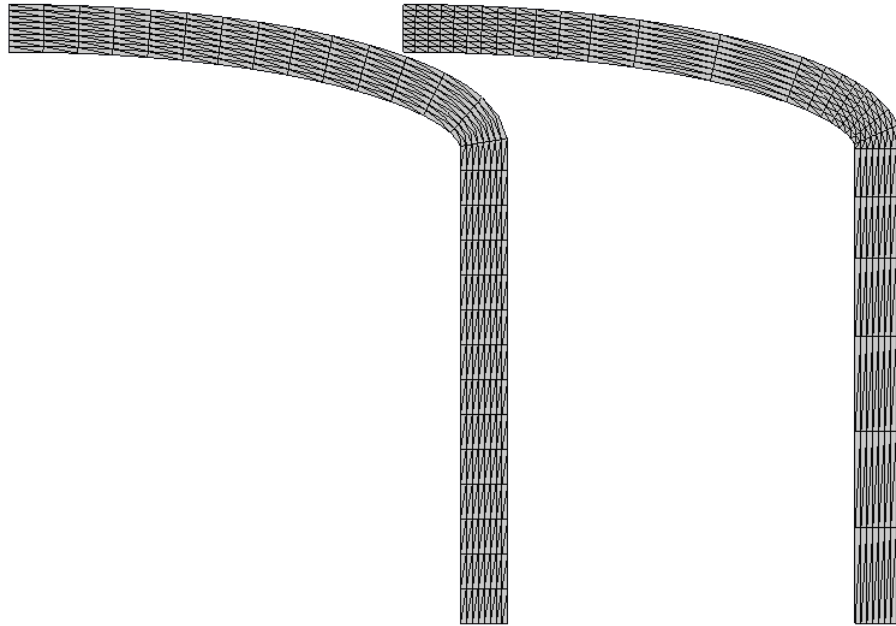


Figura 6.4: Comparação da malha uniforme com a malha refinada para parâmetros $a/b = 4$ e $a/h = 10$.

As tabelas 6.1 e 6.2 a seguir comparam os valores máximos, mínimos e médios para P_E^* e P_C^* obtidos com os valores obtidos pelos autores.

Tabela 6.1: Comparação do Limite de Escoamento P_E^* para $a/b = 4$

| a/h | camadas | Presente Trabalho | | | | Yeon e Robinson | |
|-------|---------|-------------------|--------|--------|--------|-----------------|-----------|
| | | elementos | mínimo | médio | máximo | elementos | resultado |
| 10 | 8 | 432 | 0.1790 | 0.2152 | 0.2283 | 439 | 0.206 |
| 25 | 5 | 450 | 0.2302 | 0.2345 | 0.2358 | 450 | 0.226 |
| 100 | 3 | 390 | 0.1881 | 0.1891 | 0.1902 | 387 | 0.187 |
| 300 | 2 | 416 | 0.1609 | 0.1611 | 0.1619 | 416 | 0.161 |

Apesar de certa proximidade entre os resultados, a discrepância é maior entre os perfis mais espessos, diminuindo para o perfil mais fino.

Ao contrário da pressão limite elástica, a de colapso teve uma discrepância maior em relação aos autores. A diferença neste caso foi independente da espessura. Essa tendência se manteve em todos os resultados obtidos.

Tabela 6.2: Comparação do Limite de Colapso P_C^* para $a/b = 4$

| a/h | camadas | Presente Trabalho | | | | Yeon e Robinson | |
|-------|---------|-------------------|--------|--------|--------|-----------------|-----------|
| | | elementos | mínimo | médio | máximo | elementos | resultado |
| 10 | 8 | 432 | 0.7145 | 0.7171 | 0.7181 | 439 | 0.705 |
| 25 | 5 | 450 | 0.5400 | 0.5410 | 0.5413 | 450 | 0.525 |
| 100 | 3 | 390 | 0.3622 | 0.3624 | 0.3625 | 387 | 0.355 |
| 300 | 2 | 416 | 0.2726 | 0.2729 | 0.2731 | 416 | 0.265 |

6.4 Convergência e Comparação dos Resultados

O número de remalhagens dependeu do perfil estudado variando entre três remalhagens (num total de quatro simulações) e cinco em malhas com cerca de 2000 nós. As pressões limites foram consideradas convergentes quando a oscilação entre as três últimas simulações era inferior a 2%. A malha mais refinada foi a usada na comparação.

Os resultados das pressões limites elásticas foram próximos dos resultados obtidos por Yeon e Robinson mas sempre superiores, entre 2,5% e 4,5% maiores. Apesar de ser verificado que uma malha mais grossa tende a superestimar esta pressão limite, simulações com malhas muito finas feitas para alguns parâmetros mantiveram estes resultados superiores.

Por exemplo, para os parâmetros $a/b = 2$ e $a/h = 100$, foram feitas quatro remalhagens e obteve-se uma pressão $P_E^* = 0,687$ com a malha mais fina da série tendo 900 elementos e 1991 nós. Para a mesma geometria foi feita uma outra simulação com uma malha uniforme extremamente fina de 3600 elementos e 7813 nós e obteve-se uma pressão limite de 0,685. Yeon e Robinson obtiveram 0,661. Infelizmente tal tipo de análise com uma malha extremamente fina não foi possível para a pressão limite P_C^* pois o tempo de processamento de uma análise de *shake-down* seria grande demais.

A tabela 6.3 contém todos os resultados de Yeon e Robinson para a pressão P_E^* e a comparação com os resultados obtidos neste trabalho.

A tabela 6.4 compara os resultados para a pressão limite de colapso P_C^* .

A diferença de resultados para a pressão limite de colapso P_C^* pode ser explicada pelo uso de algoritmos diferentes de *shake-down*. A tendência dos resultados deste trabalho serem menos conservativos do que Yeon e Robinson já foi verificada mesmo para malhas semelhantes. Vale mencionar que em seu artigo, os autores encontram resultados ainda menos conservativos que os obtidos em suas referências.

A diferença na P_E^* porém deve-se provavelmente ao uso de uma malha mais refinada neste trabalho devido ao aumento da disponibilidade de potência computacional desde a publicação do artigo. Para malhas semelhantes os resultados foram bastante

Tabela 6.3: Comparação das pressões P_E^* para diferentes formatos e espessuras.

| Parâmetros Geométricos | | Pressão Limite de Escoamento P_E^* | |
|------------------------|-----|--------------------------------------|-----------------|
| a/b | a/h | Presente Trabalho | Yeon e Robinson |
| 2.0 | 25 | 0.698 | 0.667 |
| 2.0 | 100 | 0.687 | 0.661 |
| 2.0 | 300 | 0.684 | 0.651 |
| 2.5 | 25 | 0.469 | 0.450 |
| 2.5 | 100 | 0.426 | 0.414 |
| 2.5 | 300 | 0.409 | 0.393 |
| 3.0 | 25 | 0.351 | 0.338 |
| 3.0 | 100 | 0.304 | 0.296 |
| 3.0 | 300 | 0.281 | 0.270 |
| 4.0 | 25 | 0.235 | 0.226 |
| 4.0 | 100 | 0.192 | 0.187 |
| 4.0 | 300 | 0.167 | 0.161 |

próximos e a diferença poderia ser atribuída a detalhes das malhas. À medida porém que aumentou-se o número de elementos obteve-se pressões ainda maiores para o limite elástico do material.

Até aqui os parâmetros geométricos foram feitos exatamente como no artigo de Yeon e Robinson. Porém notou-se que para uma razão de aspecto $a/b = 2$ no perfil mais espesso, com $a/h = 10$, foi observado que a falha ocorre simultaneamente no centro do tampo e no cilindro. Em nenhum dos outros perfis isso foi observado.

Decidiu-se então investigar a influência do comprimento do cilindro, l nas pressões P_E^* e P_C^* . Foi então usado, além de $a/l = 1$, $a/l = 0,5$ e $1,5$. A figura 6.5 ilustra a deformada para os três diferentes valores de l .

Tabela 6.4: Comparação das pressões P_C^* para diferentes formatos e espessuras.

| Parâmetros Geométricos | | Pressão Limite de Colapso P_C^* | |
|------------------------|-----|-----------------------------------|-----------------|
| a/b | a/e | Presente Trabalho | Yeon e Robinson |
| 2.0 | 10 | 1.225 | 1.186 |
| 2.0 | 25 | 1.171 | 1.134 |
| 2.0 | 100 | 1.089 | 1.054 |
| 2.0 | 300 | 0.986 | 0.945 |
| 2.5 | 10 | 1.070 | 1.040 |
| 2.5 | 25 | 0.940 | 0.911 |
| 2.5 | 100 | 0.754 | 0.709 |
| 2.5 | 300 | 0.611 | 0.583 |
| 3.0 | 10 | 0.910 | 0.887 |
| 3.0 | 25 | 0.754 | 0.733 |
| 3.0 | 100 | 0.544 | 0.526 |
| 3.0 | 300 | 0.443 | 0.416 |
| 4.0 | 10 | 0.719 | 0.705 |
| 4.0 | 25 | 0.543 | 0.527 |
| 4.0 | 100 | 0.366 | 0.354 |
| 4.0 | 300 | 0.290 | 0.265 |

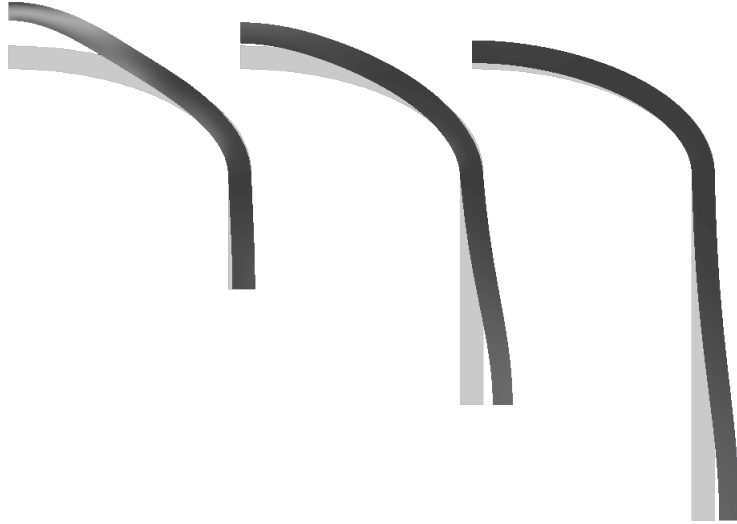


Figura 6.5: Deformadas para diferentes comprimentos de l com parâmetros $a/b = 2$ e $a/h = 10$.

Os valores obtidos para P_E^* e P_C^* estão resumidos na tabela 6.5.

Tabela 6.5: Variação de P_E^* e P_C^* em função de l para $a/b = 2$ e $a/h = 10$

| a/l | P_E^* | P_C^* |
|-------|---------|---------|
| 0,5 | 0,691 | 1,269 |
| 1,0 | 0,692 | 1,225 |
| 1,5 | 0,697 | 1,206 |

Pela figura 6.5 podemos ver que os pontos de maior deslocamento estão no centro do tampo no caso do comprimento l mais curto. Para o comprimento l mais longo, o deslocamento é maior na região cilíndrica. No caso de $a/l = 1$ temos uma situação intermediária onde há deslocamentos maiores no topo do tampo e no cilindro. As pressões limites porém mudam pouco, a pressão limite elástica aumenta cerca de 1% com l e a pressão limite de colapso cai 5%.

7

Análise de Resultados

O objetivo desta sessão é analisar os resultados das simulações para vasos com tampo elíptico, de espessura constante e sofrendo uma pressão interna uniforme. Será analisada a influência da espessura e da razão de aspecto nas pressões limites e também nos mecanismos de falha.

Os modos de colapso serão descritos e será explicado como determinou-se qual era o modo ou mecanismo causador do colapso para cada combinação de parâmetros geométricos do vaso. Reunindo-se os resultados da análise será possível construir um diagrama que relaciona esses parâmetros ao modo de colapso.

Os procedimentos de refinamento de malha são os mesmos usados na sessão 6. Isto é, uma série de simulações foram feitas para uma mesma geometria usando-se malhas com progressivamente mais elementos e nós. O refinamento é feito a partir do resultado de plastificação das simulações anteriores. A plastificação é medida como o módulo do tensor da taxa de deformação.

7.1 Mecanismos de Colapso

Foi verificado que o ponto de maior plastificação, onde se inicia o colapso costuma ocorrer em três regiões particulares do vaso, às vezes simultaneamente. As regiões são: próximos à região central do tampo do vaso, próximo à região onde o tampo elíptico se une à região cilíndrica ou na parte central da região cilíndrica. Convém observar que como é simulado apenas um quarto da secção graças às simetrias do problema, a região central do cilindro corresponde à parte inferior do perfil.

No segundo caso mencionado, quando o colapso se inicia próximo à junção do tampo com o corpo cilíndrico, o mecanismo de falha é pela formação de rótulas plásticas. Regiões onde a plastificação é alta e concentrada permitem que a linha meridiana do perfil deformado gire, enquanto as outras regiões têm baixa deformação e se movimentam

rigidamente.

Espessuras menores favorecem a formação de rótula plástica. Quando a razão de aspecto é maior, ou seja, o tampo é mais excêntrico, paredes mais grossas podem produzir rótulas plásticas.

As imagens a seguir mostram a deformada plástica para os perfis estudados por Yeon e Robinson. A figura 7.1 são as deformadas para a razão de aspecto $a/b = 2$.

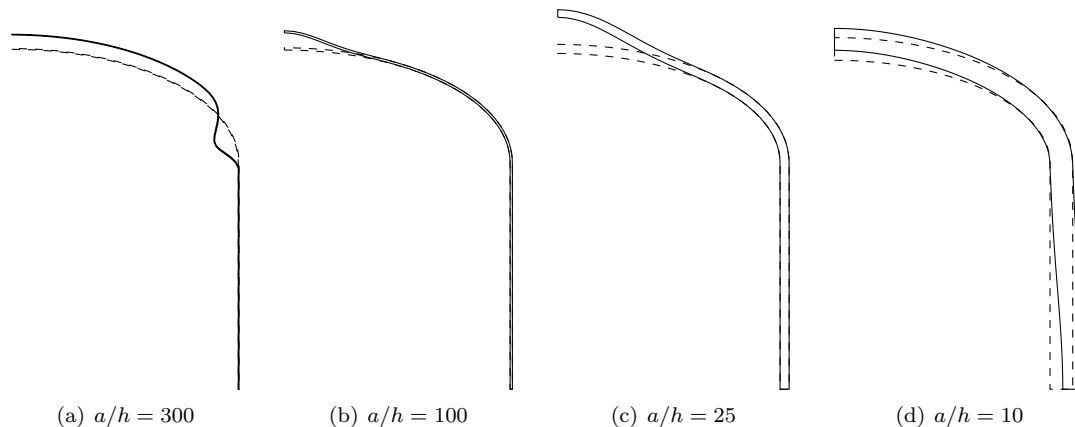


Figura 7.1: Deformadas para $a/b = 2$

Pode-se observar a formação de rótula plástica para $a/h = 300$. Nos outros casos o colapso começa na região central do tampo do vaso. Para $a/h = 10$ vemos que além da deformação no centro do tampo temos grande plastificação na parte cilíndrica como foi comentado no final da sessão 6.

A figura 7.2 mostra as deformadas para $a/b = 2, 5$.

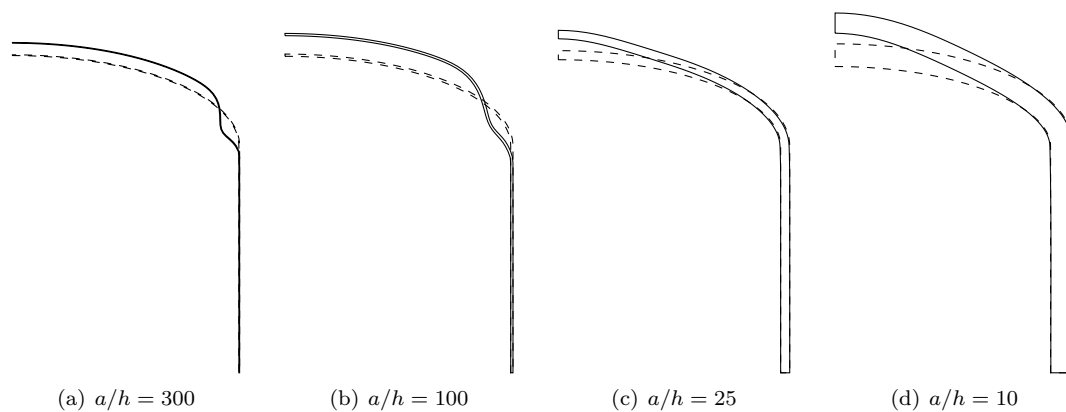


Figura 7.2: Deformadas para $a/b = 2, 5$

Para essa razão de aspecto observa-se que a formação de rótula plástica já acontece para $a/h = 100$.

A figura 7.3 mostra a deformada para $a/b = 3$.

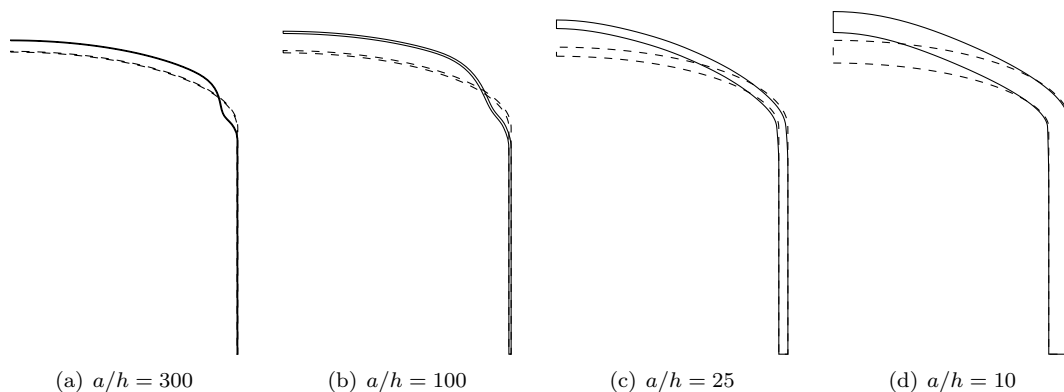


Figura 7.3: Deformadas para $a/b = 3$

Novamente a rótula plástica ocorre para $a/h = 300$ e 100 . Para $a/h = 10$ observa-se um deslocamento no centro do tampo. Para $a/h = 25$ é possível observar que o tampo não se desloca rigidamente mas também existe uma flexão ocorrendo próximo a junção do tampo com o cilindro.

Por último, na figura 7.4 podemos ver a deformada para $a/b = 4$, o perfil com maior razão de aspecto estudado.

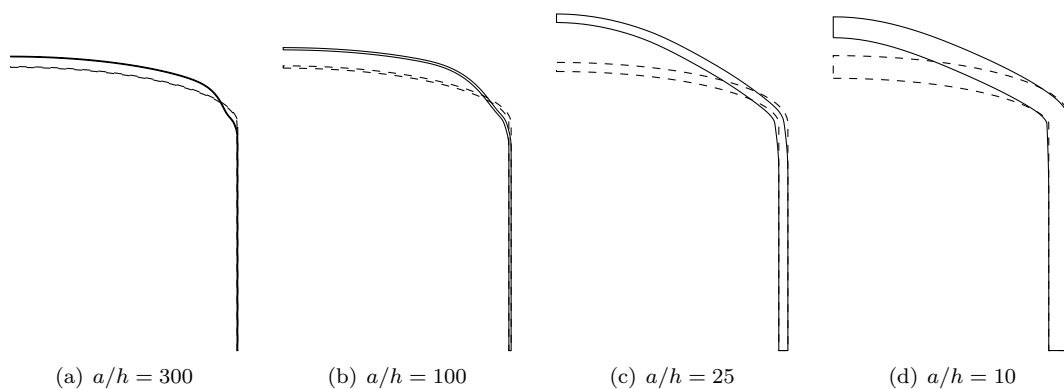


Figura 7.4: Deformadas para $a/b = 4$

Há pouca diferença entre perfis com a razão de aspecto $a/b = 4$ para aqueles com $a/b = 3$ mas neste último caso não é claro, olhando-se apenas a deformada, se no perfil com $a/h = 25$ ocorre a formação de rótula plástica. Na figura 7.5 é plotada a plastificação e pode-se observar grande plastificação na junção do cilindro com o tampo mas também no centro do tampo. Observa-se que a região com grande plastificação não está concentrada e por isso o mecanismo de colapso não será considerado como formação de rótula plástica.

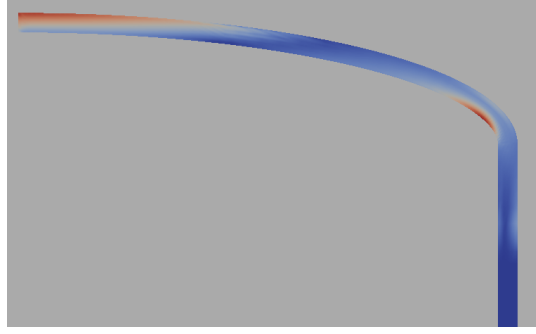


Figura 7.5: Plastificação para o perfil com $a/b = 4$ e $a/h = 25$.

Observando-se essa mudança do modo de colapso com a espessura mostra-se interessante determinar qual é a espessura onde ocorre a transição de um modo de colapso para outro e como isso influencia na resistência do vaso de pressão.

Uma série de simulações foram feitas com duas ou três remalhagens para as razões de aspecto $a/b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3$ e 4 . Ênfase maior foi dada para $a/b = 2$ e 3 . Pode-se observar que além da dependência da espessura, o grau de refinamento da malha pode influenciar no modo de colapso indicado pelo resultado. Alguns exemplos serão mostrados onde o modo de colapso muda de deformação no centro do tampo para formação de rótula plástica onde o centro do tampo não se deforma. Outra mudança ocorre com um colapso iniciado por deformação na região cilíndrica de acordo com o refinamento da malha.

Em geral, a primeira malha que é uniforme e mais grosseira induz a um resultado de colapso no centro do tampo do vaso. À medida que se refina pode-se observar outros modos de colapso. Isso gera uma incerteza na determinação precisa da espessura de transição.

7.1.1 Rótula Plástica

Para uma razão de aspecto $a/b = 2$ observou-se que para espessuras finas, tais que $a/h > 225$ a rótula plástica já aparece na primeira simulação, com uma malha uniforme de três camadas e 180 elementos. Para $a/h = 125$ a rótula plástica aparece na primeira remalhagem, numa malha de quatro camadas e 480 elementos. Com $a/h = 120$ temos a espessura mais grossa onde foi observada rótula plástica, na segunda remalhagem já com 720 elementos. A figura 7.6 mostra o resultado das três remalhagens para este perfil. Pode-se observar o comportamento típico de perfis mais grossos nas duas figuras mais à esquerda (7.6(a) e 7.6(b)) e na figura 7.6(c) a deformada muda drasticamente com a rótula plástica bem evidente.

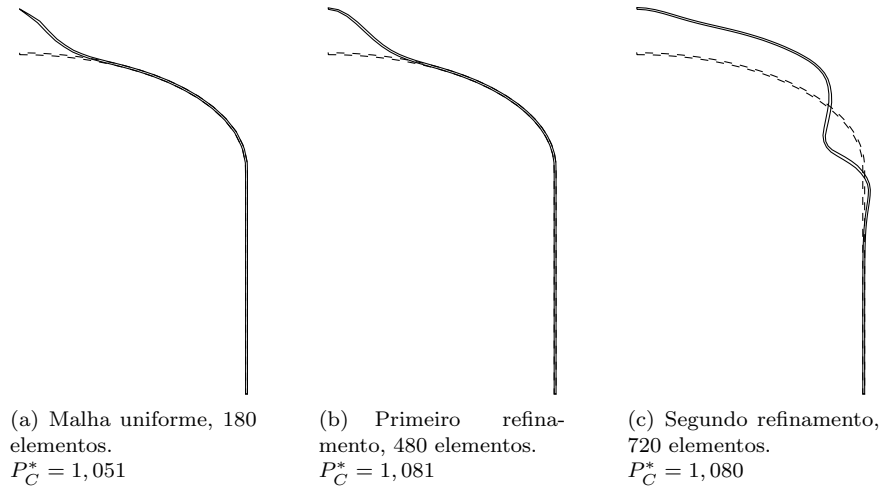


Figura 7.6: Três simulações com $a/b = 2$ e $a/h = 120$. A formação de rótula plástica só surge na segunda remalhagem.

Para uma espessura ligeiramente mais grossa, tal que $a/h = 115$, foi feita ainda uma terceira remalhagem e não foi observada a formação de rótula plástica em nenhum momento. Esta é então a espessura mais fina para a qual não ocorre a formação de rótula e o colapso se inicia por uma plastificação no centro do tampo.

Como será mostrado a seguir, normalmente ocorre uma transição, à medida que variamos a espessura, entre a formação de rótula plástica e apenas a plastificação mais espalhada no centro do tampo com pouca plastificação na junção entre tampo e cilindro. Para a razão de aspecto $a/b = 2$ essa transição não foi observada, passando de um modo para outro entre $a/h = 120$ e $a/h = 115$.

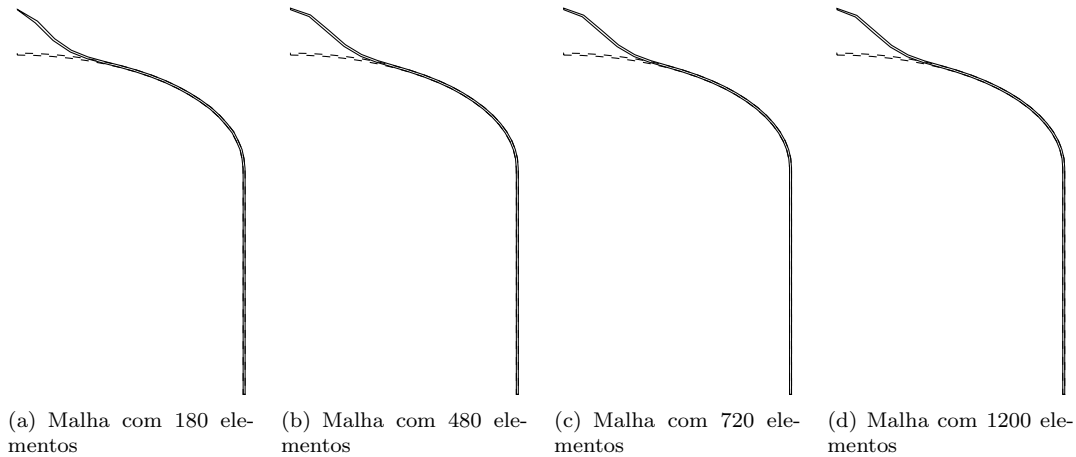


Figura 7.7: Simulações com $a/b = 2$ e $a/h = 115$. A espessura mais fina para a qual não se observou formação de rótula plástica.

Para uma razão de aspecto $a/b = 3$ a mudança no modo de colapso se dá para espessuras mais grossas e de maneira mais gradual. Para uma grande faixa de espessu-

ras observa-se grande plastificação ocorrendo próximo a junção do tampo com a parte cilíndrica e ao mesmo tempo no centro do tampo.

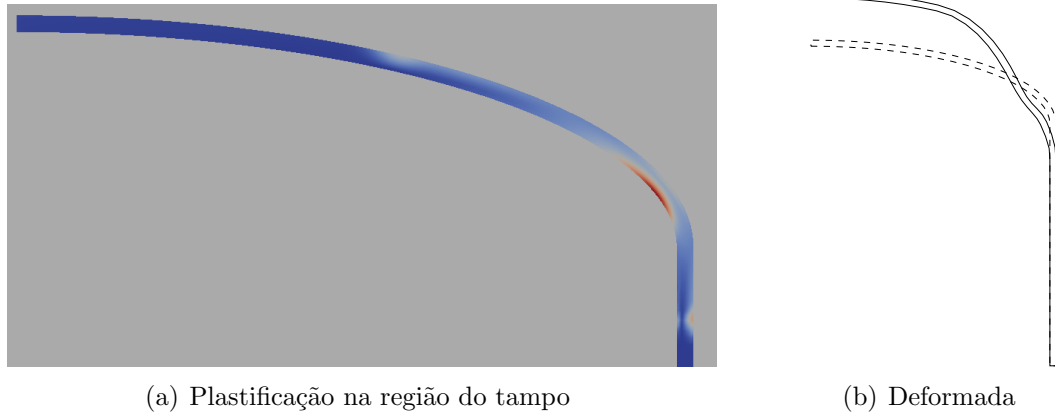


Figura 7.8: Plastificação e deformada do perfil com $a/b = 3$ e $a/h = 40$, o perfil mais espesso onde somente a rótula plástica ocorre.

A espessura mais grossa tal que ocorre a formação de rótula plástica com o característico deslocamento rígido da parte superior do tampo é tal que $a/h = 40$. Observa-se na figura 7.8(a) a concentração da plastificação na região da junção. A deformada (figura 7.8(b)) mostra o deslocamento rígido da parte superior do tampo.

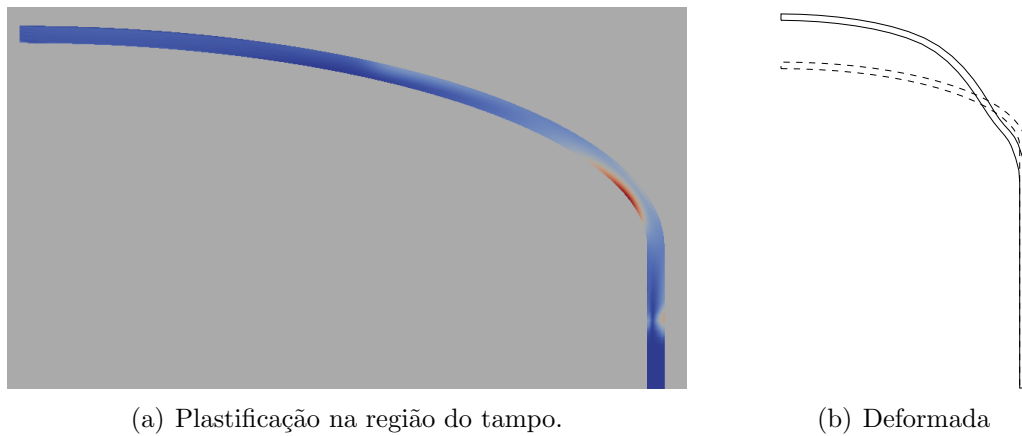


Figura 7.9: Plastificação e deformada do perfil com $a/b = 3$ e $a/h = 37$. Observa-se uma plastificação maior no centro do tampo e na deformada um deslocamento não rígido da mesma região.

A espessura imediatamente mais espessa a ser simulada foi $a/h = 37$. Novamente podemos observar na figura 7.9(a) a formação de plastificação semelhante a rótula, isto é, duas regiões de alta plastificação, uma na parte interna próxima à junção do tampo com

o cilindro e outra na parte externa, mais abaixo, já no cilindro. Porém observa-se que ela está menos concentrada e também uma plastificação maior no centro do tampo.

A mesma análise foi feita para os outros valores de razão de aspecto. Foi determinada a espessura em que ocorre a transição do colapso por formação de rótula plástica com deslocamento rígido do tampo.

Para $a/b = 2,5$ a transição ocorre com $a/h = 70$. Como mostrado na figura 7.10, para essa espessura não ocorre plastificação no centro do tampo e ele se desloca rigidamente. Para a espessura testada imediatamente mais grossa, $a/h = 55$, vemos que a plastificação não é tão concentrada.

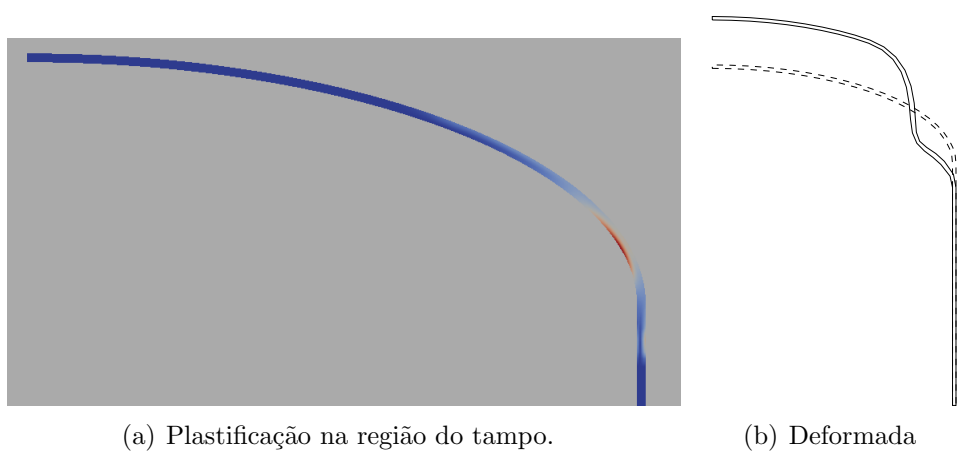


Figura 7.10: Plastificação e deformada do perfil para $a/b = 2,5$ e $a/h = 70$.

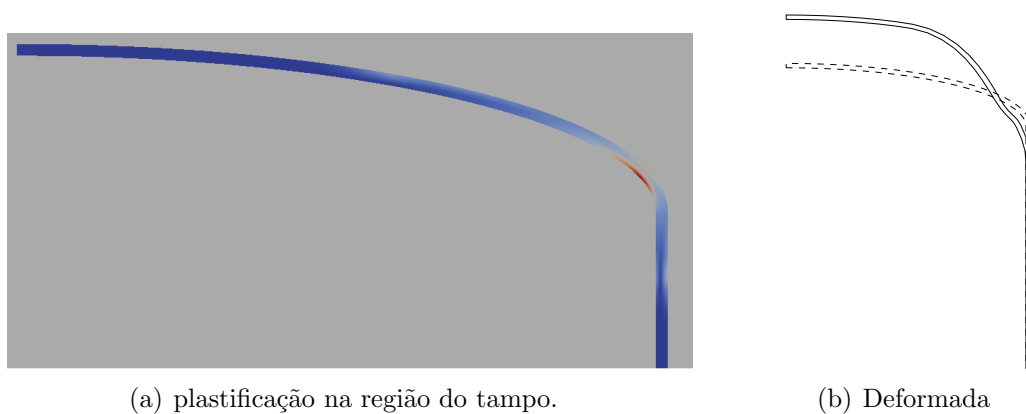


Figura 7.11: Plastificação e deformada do perfil para $a/b = 4$ e $a/h = 55$.

A figura 7.10 mostra a plastificação e a deformada para $a/b = 2,5$ e $a/h = 70$. É possível observar a semelhança com outros onde ocorre rótula plástica.

Para a razão de aspecto $a/b = 4$, a maior espessura onde ocorre rótula plástica foi com $a/h = 55$. Observa-se então uma mudança de tendência já que essa espessura é mais

finas que a limite para uma razão de aspecto $a/b = 3$. A figura 7.11 ilustra a plastificação e a deformada.

Para as razões de aspecto menores, $a/b = 1,5$ e $1,8$ não foi observada a formação de rótula plástica para espessuras finas, tais que $a/h = 500$. Para estas razões de aspecto os modos de colapso se davam por deformação na região cilíndrica ou centro do tampo como será comentado a seguir.

7.1.2 Deformação no Centro do Tampo

Como pôde ser observado na figura 7.6 e na visualização tridimensional na figura 7.12, o colapso pode dar-se por uma grande deformação no centro do tampo. Como comentado, esse modo de colapso pode ocorrer junto com uma flexão na região da junção do cilindro com o tampo.

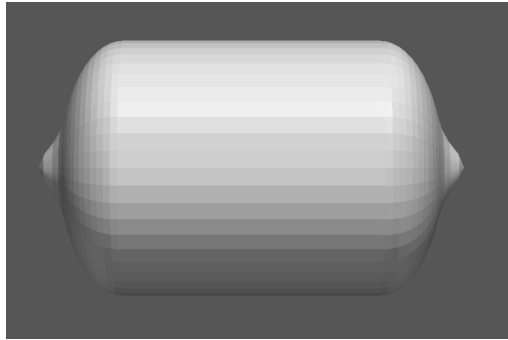


Figura 7.12: Visualização tridimensional da deformada para $a/b = 2$ e $a/h = 115$.

A determinação do limite para o qual a deformação é predominante apenas no centro do tampo foi feita de maneira mais qualitativa para as diversas razões de aspecto estudada.

Para uma razão de aspecto $a/b = 1,8$ o modo só ocorre para espessuras mais finas, com $a/h = 125$ ou maior. O colapso é bastante semelhante ao mostrado na figura 7.12. Para espessuras mais grossas o colapso ocorre no meio da região cilíndrica. A espessura imediatamente mais grossa simulada foi $a/h = 100$ e nela pode-se observar a mudança do modo de colapso em função do refinamento da malha. A deformada obtida nas três remalhagens estão ilustrada na figura 7.13.

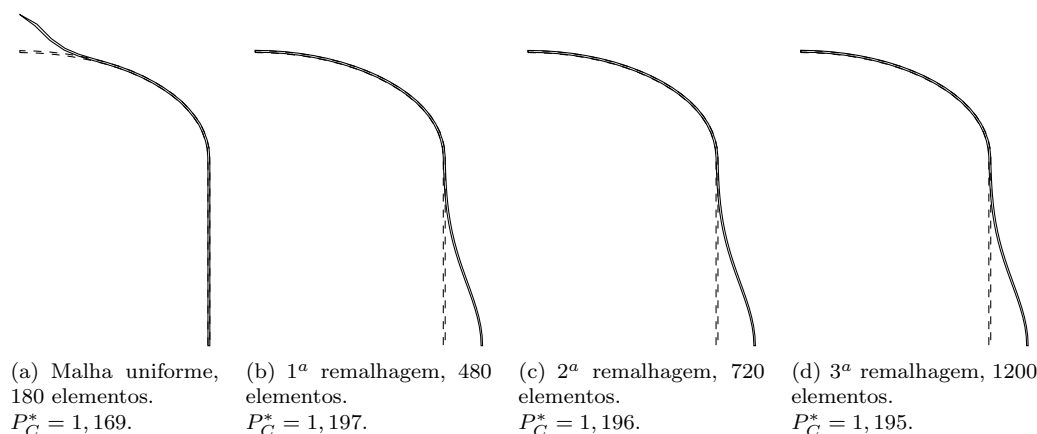


Figura 7.13: Deformadas para diferentes remalhagens mostrando a mudança do modo de colapso. Razão de aspecto $a/b = 1.8$ e espessura $a/h = 100$.

A razão de aspecto $a/b = 2$ foi a única em que três diferentes modos de colapso foram observados. A transição entre rótula plástica e deformação no centro do vaso já havia sido determinada anteriormente e se dá para $a/h = 115$. Porém, como foi notado na comparação com o artigo de Yeon e Robinson (sessão 6), para a espessura mais grossa, $a/h = 10$, ocorre grande deformação também na região cilíndrica.

Foram então feitas algumas simulações para espessuras grossas e determinou-se que para espessuras mais finas que $a/h = 19$ o colapso se inicia por deformação no centro do tampo com pouca deformação na região cilíndrica. As espessuras mais grossas (até $a/h = 10$) estão sempre numa zona de transição entre deformação no centro do tampo e no corpo cilíndrico.

Para as razões de aspecto maiores, foi observada uma zona de transição entre a formação de rótula plástica com deslocamento rígido do tampo e a deformação no centro do tampo. Nesta transição ocorre elevada plastificação em vários pontos, no centro do tampo mas também em partes da junção onde ocorre uma rotação. A medida que a espessura aumenta as deformações mais próximas a junção mas já na região cilíndrica vão ficando menores até que observa-se apenas flexão no tampo do vaso.

Para $a/b = 2,5$ os resultados mostram uma transição gradual ocorrendo para $a/h = 31$ ou 28 . Os resultados são muito semelhantes para os dois valores de espessura. A deformada para uma série de espessuras é mostrada na figura 7.14, ilustrando a transição.

Observa-se, na comparação com a configuração indeformada que para $a/h = 34$ ocorre uma rotação próxima a junção que causa uma diminuição do raio do cilindro. Já para $a/h = 25$ a deformada acompanha a indeformada durante a região de maior curvatura do tampo. As setas nas figuras 7.14(a) e 7.14(d) mostram onde começa a deformação do vaso.

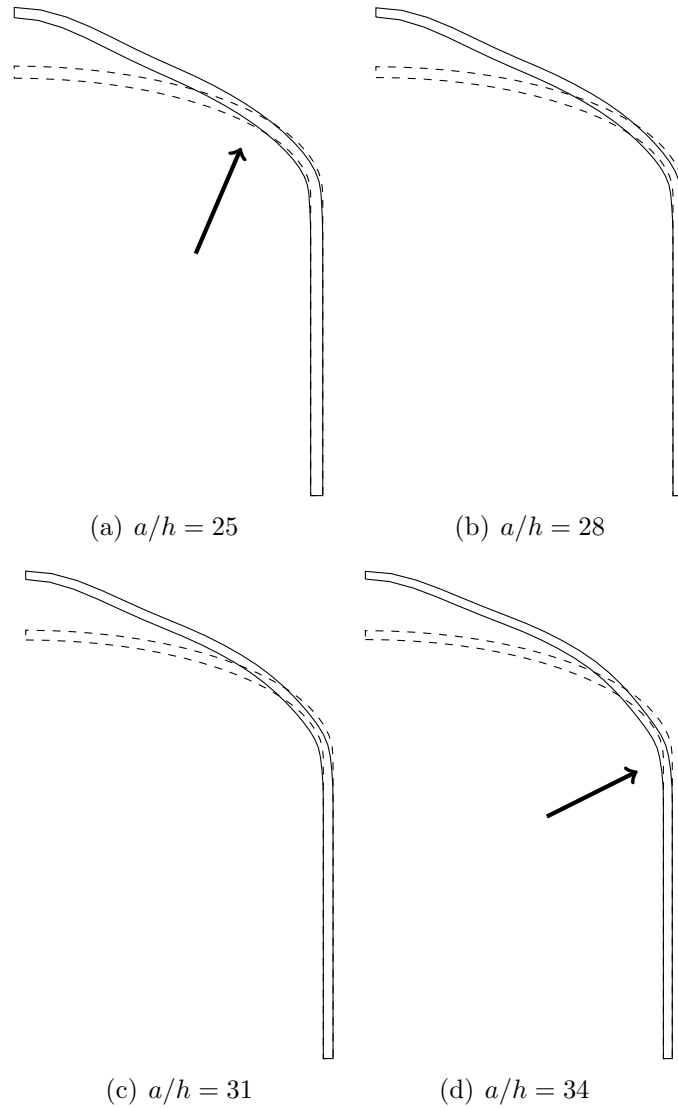


Figura 7.14: A variação da deformada com a variação da espessura.

Os resultados continuam sendo semelhantes para $a/b = 3$ e 4, ocorrendo uma mudança para deformação predominantemente no centro do vaso para $a/h = 25$ em ambos os casos.

7.1.3 Colapso no Cilindro

Quando a razão de aspecto é baixa pode ocorrer do colapso iniciar-se longe do tampo, na região cilíndrica do vaso. Esse modo de colapso depende do comprimento do vaso. Nas simulações, o comprimento l da parte cilíndrica, foi suposto igual ao raio, a . Isso implica num vaso cuja a altura da parte cilíndrica é igual ao diâmetro do cilindro.

Para uma razão de aspecto de $a/b = 1,5$ todas as espessuras testadas produziram colapso iniciado no cilindro, sendo a mais fina $a/h = 500$. A figura 7.15 ilustra a

deformação ocorrendo somente na parte cilíndrica.

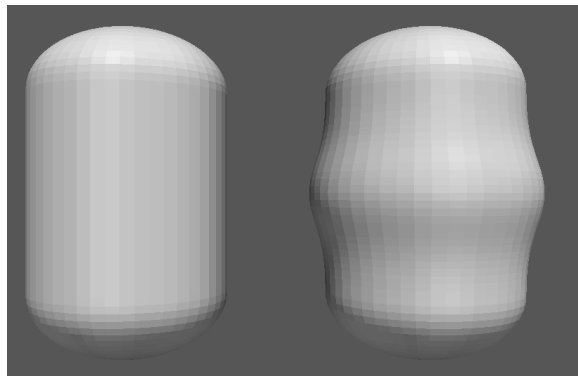


Figura 7.15: Condição indeformada a esquerda e deformada a direita para um vaso com $a/b = 1,5$ e $a/h = 100$. Observa-se claramente a deformação na região cilíndrica.

Quando $a/b = 1,8$ ocorre uma transição rápida entre colapso no centro do tampo e na região cilíndrica. A espessura limite já foi obtida anteriormente e é $a/h = 100$.

Vasos com razão de aspecto $a/b = 2$ sofrem colapsos através de modos em que há grande deformação na parte cilíndrica e também no centro do tampo. Para espessuras grossas, tais que $a/h \leq 16$ foram observados esses dois modos ocorrendo simultaneamente. A figura 7.16 mostra a condição indeformada e deformada com os dois modos ocorrendo para $a/h = 13$.

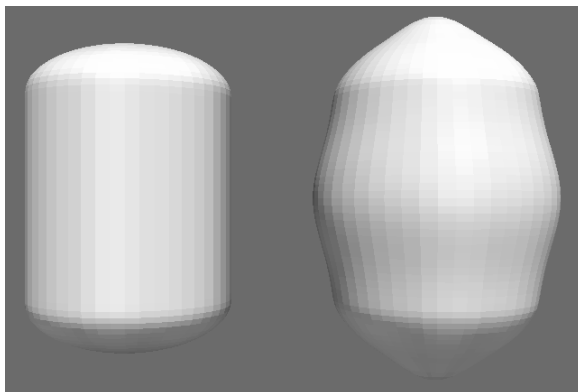


Figura 7.16: Condição indeformada a esquerda e deformada a direita para um vaso com $a/b = 2$ e $a/h = 13$. Dois modos de colapso ocorrem simultaneamente.

Para razões de aspecto $a/b \geq 2,5$ este modo não foi observado para nenhuma espessura testada.

A fim de determinar um limite mais preciso para esse tipo de colapso, algumas simulações com apenas uma remalhagem foram feitas para razões de aspecto entre 2 e

3 mas apenas para a espessura $a/h = 10$. Como esperado as deformações ocorriam no centro do tampo e no cilindro e não somente no cilindro.

Com esta espessura, não houve deformação no cilindro para $a/b \geq 2,25$. A menor razão de aspecto para a qual houve uma deformação no cilindro, e mesmo assim relativamente pequena comparada a do tampo foi $a/b = 2,1$.

7.1.4 Diagrama de Modos de Colapso

Reunindo-se todos os dados obtidos nas simulações pode-se fazer um diagrama, semelhante a um diagrama de fase, com os modos de colapso em função da razão de aspecto e da espessura. O diagrama é mostrado na figura 7.17. O inverso da espessura, a/h , é plotado na ordenada em escala logarítmica enquanto a razão de aspecto é plotada na abscissa em escala linear.

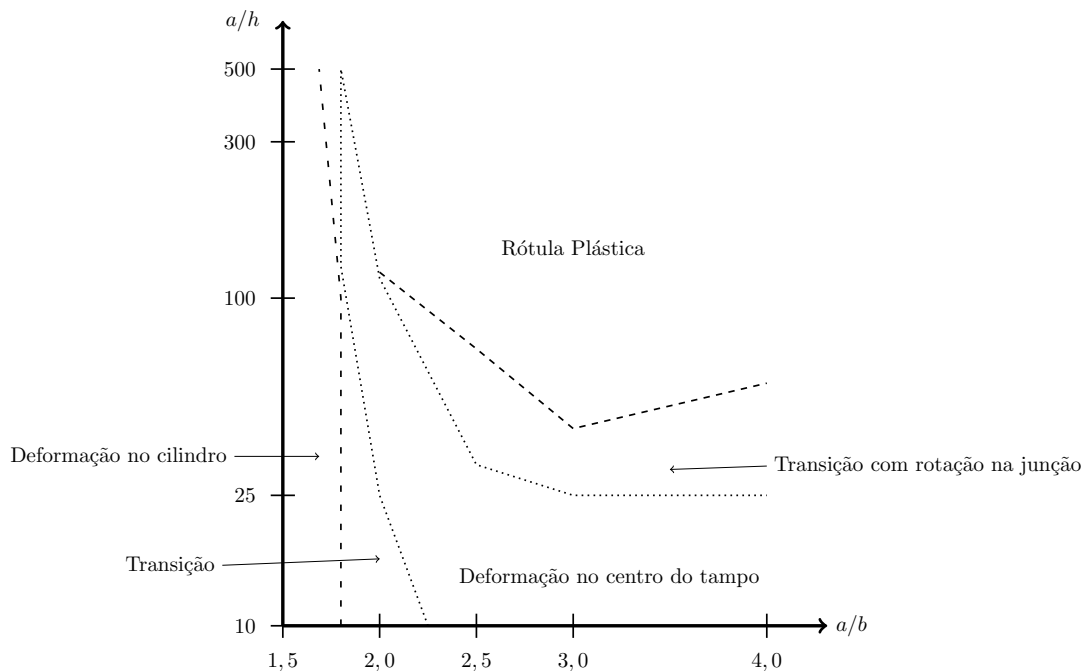


Figura 7.17: Modos de Colapso em função da razão de aspecto e espessura. As simulações foram feitas com $a = l$.

Caso fosse variado o comprimento do vaso a forma do diagrama mudaria ligeiramente. Como foi visto, um comprimento l menor em relação ao diâmetro dificulta o colapso no cilindro e traz o limite dessa região para razões de aspecto menores. Aumentando esse comprimento o limite é deslocado na direção oposta.

7.2 Variação da Pressão Limite Elástica

Aqui notaremos novamente por P_E^* a pressão limite elástica adimensional, calculada por:

$$P_E^* = \frac{P_E a}{\sigma_Y h} \quad (7.1)$$

É interessante comparar os limites obtidos numericamente com algumas soluções analíticas. Seja considerando um sólido espesso ou casca fina.

Para uma esfera isso já foi feito na sessão 5 onde a pressão P_E^* variava entre 1.481 e 1.994 para $a/h = 10$ e $a/h = 500$ respectivamente. Esses valores são muito superiores aos encontrados para os vasos de pressão estudados. Eles servem porém como referência do limite superior que se espera encontrar.

Para um cilindro espesso e com extremidades fechadas é possível obter uma solução analítica [12] para a pressão limite elástica:

$$P_{E,\text{Cilindro}}^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{(1 + h/2a)^2} \quad (7.2)$$

Aplicando as razões de espessura estudadas, tal pressão adimensional varia entre 1,047 para $a/h = 10$ e 1,152 para $a/h = 500$. O limite quando a espessura tende a zero é facilmente obtido e vale $\sqrt{2}/3 \approx 1,155$.

Nesta solução não existem momentos fletores atuando no cilindro o que reduz consideravelmente as tensões. A solução para espessuras finas de um cilindro longo e com uma extremidade engastada [17] leva a um valor de $P_E^* = 0,551$ (supondo $\nu = 0,3$).

7.2.1 P_E^* para baixas razões de aspecto

Como já foi observado na sessão 6, à medida que aumentamos a razão de aspecto, diminui-se a pressão limite elástica. A figura 7.18 mostra a variação da pressão P_E^* para as espessuras testadas e para as razões de aspecto $AR = 1, 5, 1, 8$ e 2 .

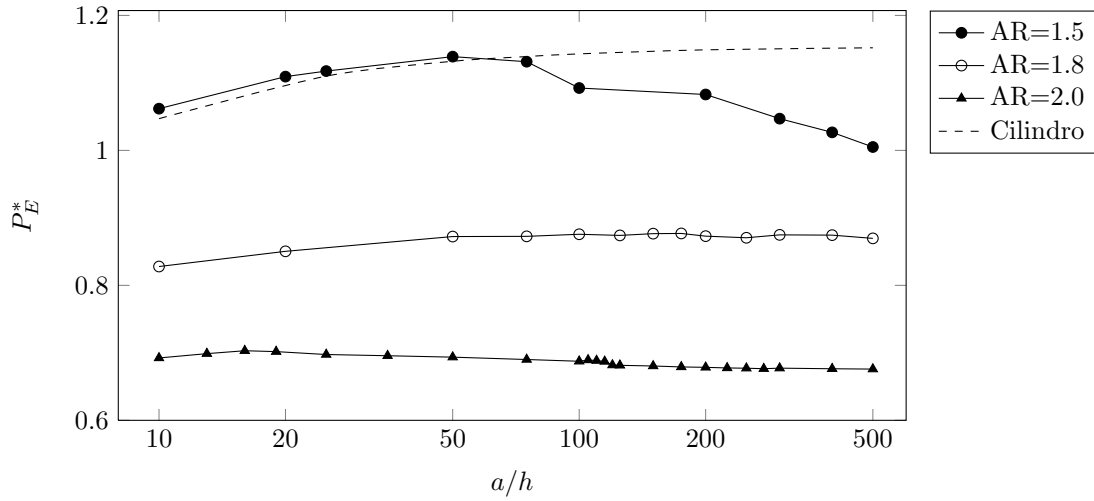


Figura 7.18: Pressão limite elástica adimensional P_E^* para razões de aspecto 1,5, 1,8, 2 e o limite para um cilindro fechado espesso.

Como foi visto anteriormente nesta sessão o colapso dos vasos com $AR = 1,5$ sempre é iniciado na região do corpo cilíndrico. Comparando as pressões limites obtidas com a esperada para um cilindro fechado vemos que para espessuras maiores ($a/h \leq 75$) existe um bom ajuste entre as duas curvas. Para espessuras menores, a pressão limite adimensional diminui com a diminuição da espessura sem existir uma tendência assintótica evidente até $a/h = 500$.

A pressão limite para $AR = 1,8$ descreve uma curva semelhante aquela do cilindro mas deslocada para baixo. A tendência assintótica é mais evidente com um limite em cerca de $P_E^* = 0,870$.

Para $AR = 2,0$ a curva também tem uma tendência assintótica, oscilando muito pouco a partir de $a/h = 100$. O limite de P_E^* parece situar-se próximo a $0,675$.

7.2.2 P_E^* para altas razões de aspecto

Razões de aspecto maiores que 2,0 resultaram em curvas de pressão limite com características diferentes das anteriores para a faixa de espessuras simuladas. A figura 7.19 mostra a variação de P_E^* para $AR = 2,5, 3$ e 4.

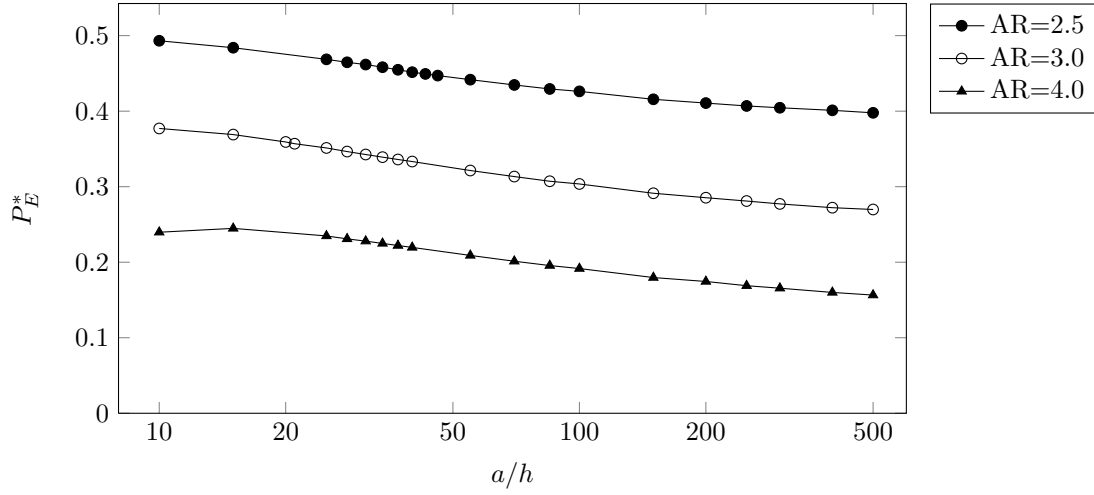


Figura 7.19: Pressão limite elástica adimensional P_E^* para razões de aspecto 2.5, 3 e 4.

Pode se observar que as curvas tem um formato semelhante entre si com a pressão P_E^* decrescendo a medida que a espessura diminui. Para espessuras até $a/h = 500$ não é possível precisar o limite de P_E^* quando a espessura tende a zero.

A ocorrência de flexão e portanto de um momento fletor maior atuando no vaso explica a pressão de colapso consideravelmente menor para essas razões de aspecto.

7.3 Variação da Pressão Limite de Colapso

Novamente usaremos a notação P_C^* para a pressão limite de colapso adimensional, calculada por:

$$P_C^* = \frac{P_C a}{\sigma_Y h} \quad (7.3)$$

A pressão limite de colapso é necessariamente maior que a pressão limite elástica uma vez que qualquer pressão abaixo do limite elástico só gera deformações reversíveis. Novamente compararemos as pressões de colapso obtidas com algumas soluções analíticas.

Para um cilindro de parede fina temos uma solução aproximada [10] que nos fornece:

$$P_{C,\text{Cilindro Fino}}^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 - h/2a} \quad (7.4)$$

Para as espessura mais fina simulada, $a/h = 500$, temos $P_C^* = 1,154$.

A solução aproximada para uma espessura grossa [10] nos fornece uma pressão de colapso:

$$P_{C,\text{Cilindro Espesso}}^* = \frac{2a}{\sqrt{3}h} \ln \left(\frac{a + h/2}{a - h/2} \right) \quad (7.5)$$

Para uma espessura de $a/h = 10$ temos $P_C^* = 1,157$.

Para algumas configurações geométricas a pressão de colapso adimensional nem sempre converge para um valor positivo quando a espessura tende a zero. Para um disco plano sujeito a uma pressão uniforme perpendicular temos a seguinte expressão [6] para a pressão de colapso:

$$\text{Extremidades engastadas } P_C^* = 2.814 \frac{h}{a} \quad (7.6a)$$

$$\text{Extremidades simplesmente apoiadas } P_C^* = \frac{3h}{2a} \quad (7.6b)$$

Em ambos os casos o limite de P_C^* é zero quando $h \rightarrow 0$. Isso ocorre pois ao contrário do cilindro e da esfera temos um colapso causado por um momento fletor.

7.3.1 P_C^* para baixas razões de aspecto

Na subseção 7.2.1 foi observado que a pressão limite elástica de um cilindro servia como boa aproximação para o valor de P_E^* para uma razão de aspecto $AR = 1,5$ com espessuras grossas. A partir de $a/h \geq 75$ a pressão limite do vaso era inferior a de um cilindro fechado com a mesma espessura.

A pressão limite de colapso tem um comportamento diferente. Para grandes espessuras, até $a/h = 20$, os valores para as três razões de aspectos são muito próximos e também semelhante a aproximação para um cilindro fino, equação (7.4).

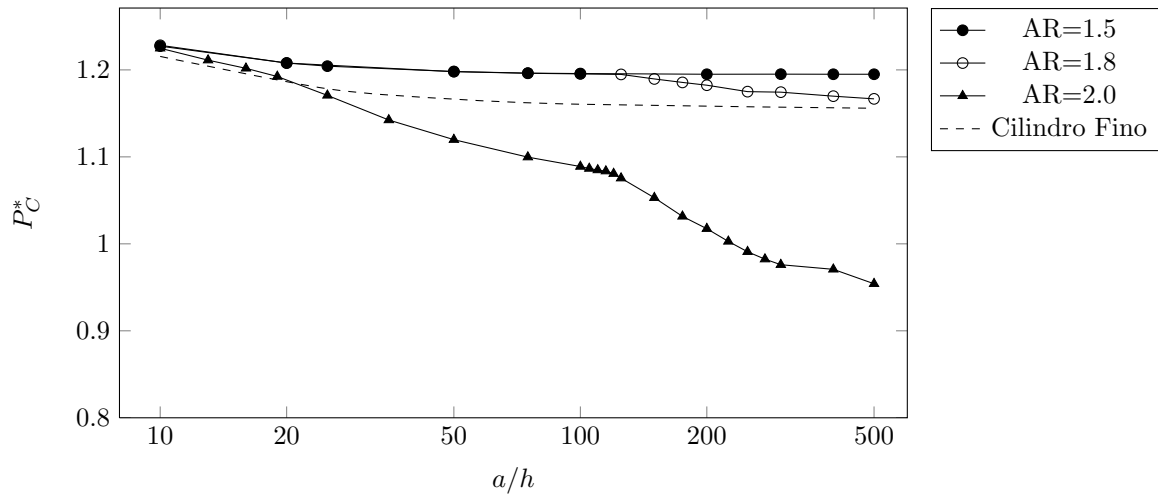


Figura 7.20: Pressão de colapso adimensional P_C^* para razões de aspecto 1,5, 1,8, 2 e a aproximação limite para um cilindro fechado fino.

Para as razões de aspecto $AR = 1,5$ e $1,8$ os valores continuam muito próximos entre si até cerca de $a/h = 150$. A partir deste valor a pressão de colapso se mantém praticamente constante para $AR = 1,5$ enquanto para $AR = 1,8$ a queda se acentua.

Pelo diagrama de modos de colapso, figura 7.17, vemos que para essa faixa de valor o modo de colapso de vasos com razão de aspecto 1,8 entra numa faixa de transição com plastificação ocorrendo no centro do tampo e no corpo cilíndrico.

A pressão de colapso para um cilindro fino limita inferiormente a pressão de colapso para estas duas razões de aspecto.

Para a razão de aspecto $AR = 2$ o comportamento da curva é bem diferente. Podemos observar três regiões distintas no gráfico, até $a/h = 20$ a curva acompanha o limite para um cilindro fino. A partir deste valor a taxa de queda do valor de P_C^* acentua-se ligeiramente. Essa mudança coincide com a mudança no modo de colapso relatada anteriormente entre um colapso iniciado na região cilíndrica e um iniciado no centro do tampo.

A outra mudança de comportamento da curva é mais evidente e ocorre em $a/h \approx 120$ coincidindo com a segunda mudança no modo de colapso observada, quando o colapso deixa de ser iniciado no centro do tampo para ser iniciado pela formação de rótulas plástica próximo a junção do tampo com o corpo cilíndrico.

Nesta zona da curva observa-se uma queda mais acentuada da pressão de colapso e nenhuma tendência assintótica parece evidente. De fato o limite se situa longe da faixa de espessuras simuladas. Usando teoria de cascas, as simulações feitas por [18] e [9] indicam um limite assintótico bem inferior, $P_C^* \approx 0,76$ para $a/h > 10^4$.

7.3.2 P_C^* para altas razões de aspecto

Novamente podemos observar na figura 7.21 grande semelhança entre as curvas de pressão colapso P_C^* para as razões de aspecto 2, 5, 3 e 4. As curvas são descendentes e quase paralelas entre si sendo que a pressão P_C^* mantém a tendência de ser menor para razões de aspecto maiores.

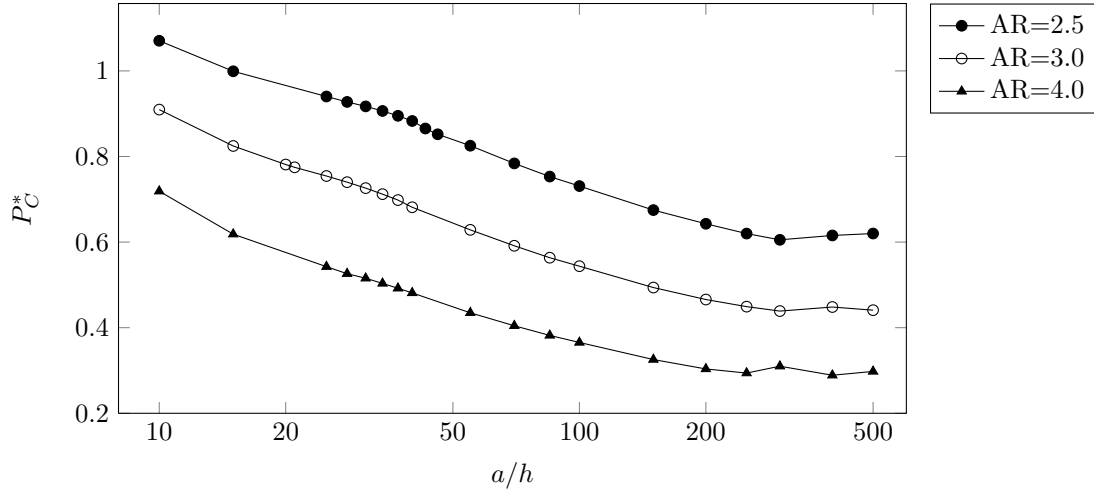


Figura 7.21: Pressão de colapso adimensional P_C^* para razões de aspecto 2, 5, 3 e 4.

Não é possível fazer uma divisão das curvas em regiões tão distintas como foi possível para $AR = 2$. Para $AR = 2, 5$ podemos ver uma mudança de inclinação para $a/h \approx 40$ coincidindo com a mudança do modo de colapso para rótula plástica. A mesma mudança ocorre para $AR = 3$ em $a/h \approx 34$ mas de maneira mais sutil. Para $AR = 4$ não existe uma mudança evidente de comportamento da curva.

A tendência assintótica fica evidente para espessuras maiores para estas razões de aspecto sendo os resultados para $a/h \geq 200$ já muito próximos entre si. Obtemos limites próximos a 0,62, 0,44 e 0,30 para razões de aspecto 2, 5, 3 e 4 respectivamente.

7.4 Relação entre P_E^* e P_C^*

A diferença entre a pressão limite elástica e a pressão limite de colapso fornece algumas informações sobre o modo de colapso. Por exemplo, uma casca esférica com uma pressão interna atuando colapsa com sua superfície num estado de tração quase uniforme. Como consequência a razão P_C/P_E será próxima a um.

De fato, as equações (5.4) e (5.3) levam ao mesmo limite, $P_C^* = P_E^* = 2$.

Para um cilindro longo e fechado também temos um estado de tração e as equações (7.4) e (7.2) levam ao mesmo limite $\sqrt{3}/2 \approx 1,155$.

Quando o colapso é causado por flexão do vaso, e portanto por um momento atuante, o valor de P_C^* não converge para o valor de P_E^* já que o limite de escoamento do material não é atingido em todos os pontos simultaneamente. O resultado para vigas retangulares [10] é bem conhecido e nos fornece o valor do momento que faz com que a

viga atinja seu limite elástico e o momento que causa o colapso:

$$M_E = \frac{\sigma_Y b h^2}{6} \quad (7.7a)$$

$$M_C = \frac{\sigma_Y b h^2}{4} \quad (7.7b)$$

Onde b é a largura da viga. Se o momento atuante for diretamente proporcional à pressão, teremos $P_C^*/P_E^* = 1,5$. Apesar de a relação acima ter sido obtida para uma viga retangular e reta, o mesmo vale para um cilindro fino com um momento atuando ao longo do comprimento circunferencial [17].

Quando existe uma combinação de uma tração F e um momento fletor M , ambos diretamente proporcionais à pressão, a razão entre as pressões de colapso e de limite elástica para uma viga de seção retangular será $1 \leq P_C^*/P_E^* \leq 1,5$. A figura 7.22 mostra um diagrama de limites elásticos e de colapso para este tipo de viga.

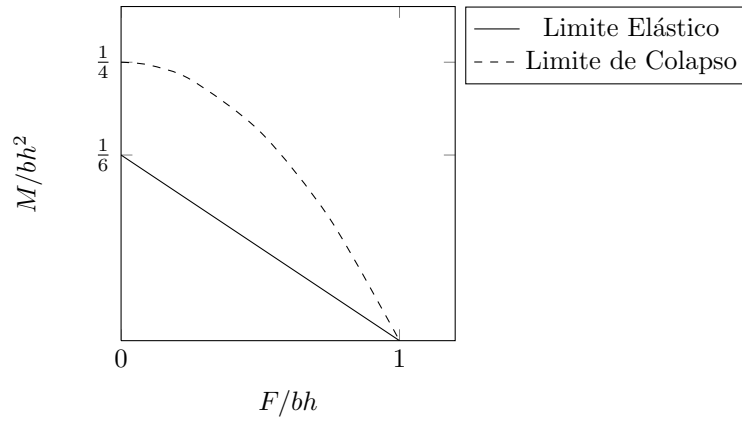


Figura 7.22: Diagrama de limite elástico e colapso para uma viga reta de seção retangular.

Para os vasos de pressão estudados, os valores da razão P_C^*/P_E^* oscilaram entre valores próximos a um, sendo o mínimo 1,05 e um máximo de 3,00. Como esperado os menores valores foram encontrados quando o comportamento do vaso se assemelha ao de um cilindro, quando a razão de aspecto é baixa e a espessura é alta. Os resultados para baixas razões de aspecto estão no gráfico na figura 7.23.

Para baixas razões de aspecto obteve-se as menores razões de P_C^*/P_E^* . Em particular, para $AR = 1,5$ a razão entre as pressões de limite elástico e colapso jamais ultrapassou o valor de 1,2 no intervalo de espessuras testados apesar do valor da razão ser crescente para $a/h > 50$.

Para $AR = 1,8$ o valor da razão se mantém próximo mas inferior ao esperado para uma cilindro com somente momento fletor atuando. A curva tem pouca variação a partir de $a/h = 50$ convergindo para $P_C^*/P_E^* = 1,34$.

A curva correspondente a razão P_C^*/P_E^* para $AR = 2$ sofre grande variação refletindo a grande variação de P_C^* para essa razão de aspecto. Como P_E^* se manteve praticamente constante na faixa de espessuras testadas podemos usar o resultado de [9] e supor que o limite da razão P_C^*/P_E^* para essa razão de aspecto seja próximo a 1,13. Mais próximo aos valores de colapso por tração do que por momento fletor unicamente.

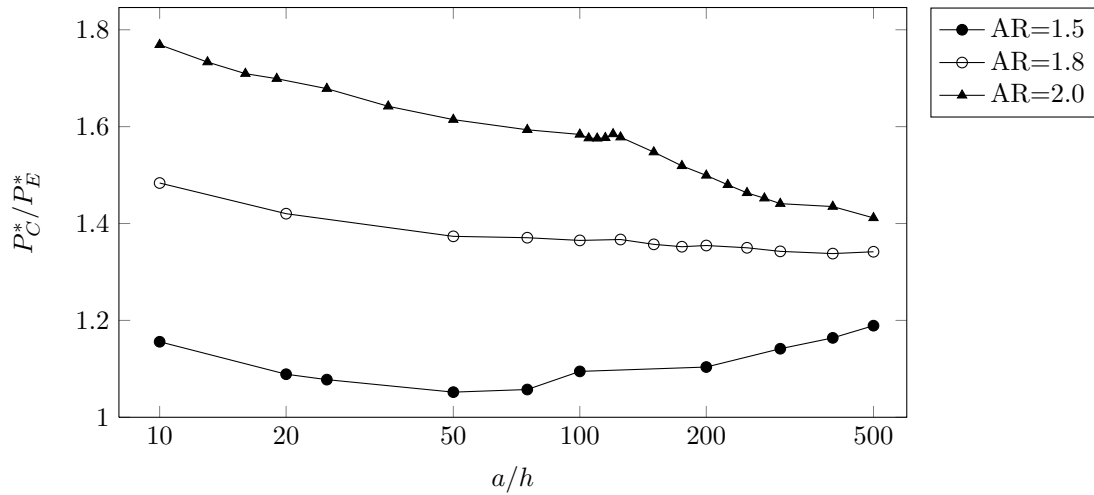


Figura 7.23: Razão entre as pressões limite elástica e de colapso, P_C^*/P_E^* para razões de aspecto 1, 5, 1, 8 e 2.

A figura 7.24 mostra a variação da razão P_C^*/P_E^* para altas razões de aspecto. Para esses parâmetros geométricos temos que a razão sempre fica acima de 1,5.

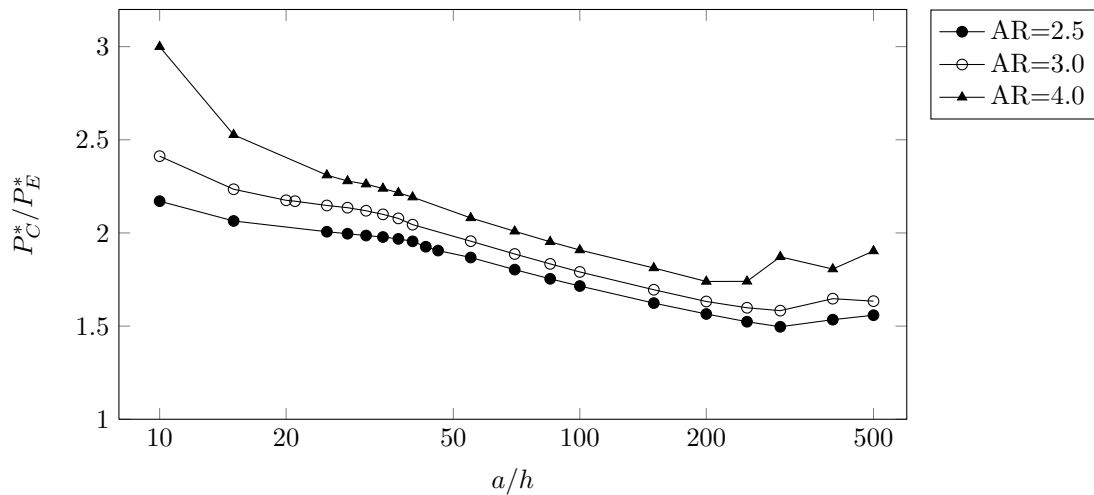


Figura 7.24: Razão entre as pressões limite elástica e de colapso, P_C^*/P_E^* para razões de aspecto 2, 5, 3 e 4.

As curvas são bastante semelhantes e quase paralelas entre si, consequência direta do mesmo comportamento observado para as curvas de P_E^* e P_C^* . Como a pressão P_C^* decai

mais rápido que P_E^* a curva das razões P_C^*/P_E^* são decrescente até cerca de $a/h = 300$ quando elas atingem valores próximos a 1,5.

Como foi observado, as curvas de P_C^* se mantêm razoavelmente constante, para $a/h \geq 200$ enquanto as curvas de P_E^* continuam decrescentes. Isso gera um aumento no valor da razão P_C^*/P_E^* para baixas espessuras e um limite quando a espessura tende a zero não é evidente.

7.5 Colapso por Flambagem

Alguns vasos de pressão podem colapsar por flambagem mesmo sob pressão interna. Como pudemos ver nesta sessão, a deformação dos vasos, em especial nos mais finos e com maior razão de aspecto, leva a um estreitamento da região cilíndrica próximo a junção. Este estreitamento gera uma tensão circunferencial compressiva que pode levar a flambagem do vaso.

A deformação resultante da flambagem não tem simetria da revolução e como o modelo é axissimétrico, ele é incapaz de prever esse tipo de fenômeno. A figura 7.25 mostra um vaso torisférico que sofreu flambagem na junção do tampo com o corpo cilíndrico.

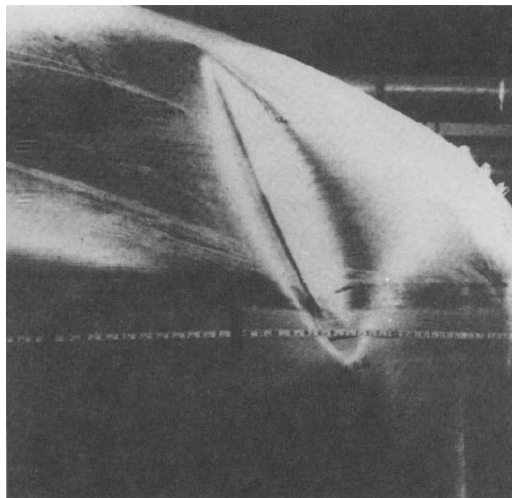


Figura 7.25: Fonte: GALLETLY 1982 [8] Detalhe de um vaso de pressão com tampo torisférico que sofreu flambagem.

Em um elipsoide completo (esferoide oblatado)[4] sob pressão interna, a tensão circunferencial é compressiva para uma razão de aspecto maior que $\sqrt{2} \approx 1.41$. Para os tampos elipsoidais simulados neste trabalho, todos com razão de aspecto maior que 1.5, foi encontrada tensão circunferencial compressiva na junção do tampo com o corpo cilíndrico. Ainda segundo [4], para um semi-elipsoide engastado, existem combinações de razão de aspecto e espessura que são estáveis.

Para verificar a estabilidade das soluções axissimétricas, serão usados resultados disponíveis na literatura para a pressão de colapso por flambagem. Os valores serão comparados com as pressões de colapso "axissimétrico" obtidas. Se a pressão que leva a flambagem do vaso for inferior a pressão de colapso então pode-se dizer que o colapso é na verdade causado por flambagem.

Não foi encontrado na literatura resultados para vasos com tampo elipsoidal, porém Galletly [8], propõe uma correlação entre os parâmetros geométricos de tampos torisféricos e do o material com a pressão de colapso devido a flambagem, P_B . A correlação foi obtida a partir de simulações numéricas com o *software* BOSOR 5.

$$\frac{P_B}{\sigma_Y} = \frac{118.2(1 - 125 \sigma_Y/E)(R_t/a)^{0.84}}{(a/h)^{1.53}(R_s/a)^{1.1}} \quad (7.8)$$

Onde E é o módulo de Young do material, R_t é o raio do toro e R_s o raio da calota esférica. Ver figura 7.26(a).

Batchelor e Taylor [5] propõem algumas maneiras de se fazer uma equivalência entre um vaso torisfério e um elipsoidal. Em seu artigo eles concluem que a relação que melhor aproxima a pressão de colapso (axissimétrico) é aquela onde as razões entre a curvatura máxima e mínima da elipse é igual a razão entre o raio do toro e o raio da calota esférica e é reproduzida a seguir:

$$\frac{1}{AR} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{R_t}{a} + (1 - \frac{R_t}{a}) \sqrt{\frac{2R_t}{a}}}{2 - \frac{R_t}{a}} \quad (7.9a)$$

$$\frac{R_s}{a} = \frac{a}{R_t AR} \quad (7.9b)$$

Colocar R_t em função de b/a envolve resolver uma cúbica mas pode-se aproximar o valor de R_t com um erro inferior a 0.6% para $1.5 \leq AR \leq 4$ por um polinômio do segundo grau:

$$\frac{R_t}{a} = 0.7639 \left(\frac{1}{AR} \right)^2 + 0.2830 \left(\frac{1}{AR} \right) - 0.0280 \quad (7.10)$$

A figura 7.26(b) mostra o perfil de um vaso com tampo torisfério e seu equivalente com tampo elipsoidal. A tabela 7.1 mostra os parâmetros geométricos obtidos para as razões de aspecto testadas.

Tabela 7.1: Parâmetros geométricos para um tampo torisfério equivalente.

| AR | 1,5 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 4,0 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| R_t/a | 0,5002 | 0,3650 | 0,3045 | 0,2074 | 0,1512 | 0,0905 |
| R_s/a | 1,3329 | 1,5221 | 1,6422 | 1,9284 | 2,2044 | 2,7626 |

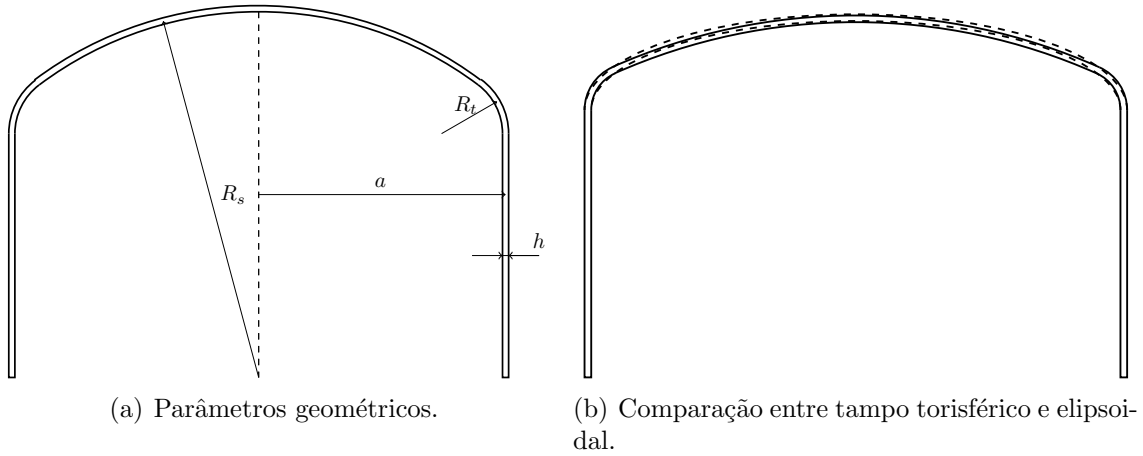


Figura 7.26: Parâmetros geométricos de um tampo torisférico e a comparação de um tampo torisférico (linha cheia) e seu equivalente elipsoidal (linha tracejada), com $AR = 3$.

Extrapolando os resultados de Batchelor e Taylor para flambagem, pode-se chegar a uma correlação para vasos de pressão com tampos elipsoidais. Substituindo as equações (7.10) e (7.9b) na equação (7.8) obtêm-se essa correlação.

$$P_B^* = \frac{P_B a}{\sigma_Y h} \quad (7.11a)$$

$$P_B^* = \frac{1 - 125 \sigma_Y/E}{(a/h)^{0.53}} [8.941AR^{-1.433} + 3.312AR^{-0.433} - 0.328AR^{0.541}]^{1.94} \quad (7.11b)$$

É importante ressaltar que na equação (7.11b) aparece o módulo de Young do material que até então não influenciava nas análises uma vez que se supunha as deformações como pequenas (equivalentemente, $\sigma_Y/E \approx 0$).

Em seu artigo, Galletly não indica para qual intervalo de valores da razão σ_Y/E a aproximação é válida. Se $\sigma_Y/E > 1/125$ a relação levaria a resultados absurdos. Ainda, baseado nos parâmetros de tampo torisférico usados no artigo as razões de aspecto 1.5 e 1.8 estão fora do intervalo estudado.

Assim, será feita uma análise de flambagem para $AR = 2, 2.5, 3$ e 4 . A figura 7.27 mostra a comparação entre a pressão de colapso adimensional para $AR = 3$ e a pressão de colapso por flambagem para diferentes valores de σ_Y/E .

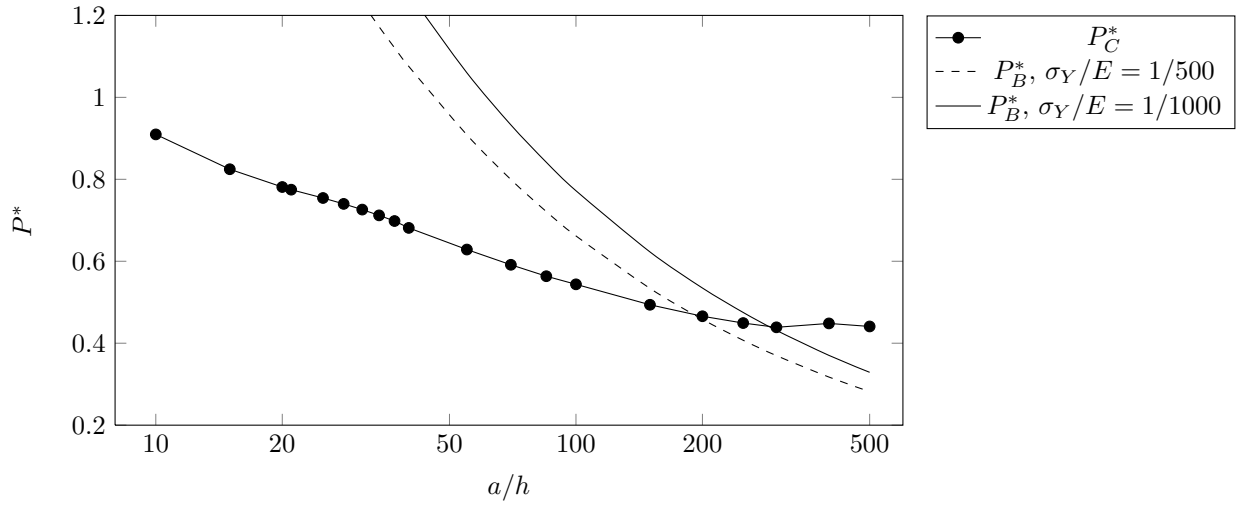


Figura 7.27: Pressão de colapso e de flambagem para $AR = 3$

Pode-se observar que se $\sigma_Y/E = 1/500$, colapso por flambagem pode ocorrer para espessuras tais que $a/h \approx 190$. Uma maior rigidez do material dificulta a flambagem e para $\sigma_Y/E = 1/1000$ tem-se um colapso por flambagem para $a/h \approx 250$.

Estendendo essa análise para as outras razões de aspecto pode-se aprimorar o diagrama de modos de colapso feito anteriormente nesta sessão. Inclui-se agora na figura 7.28 o colapso por flambagem assimétrica.

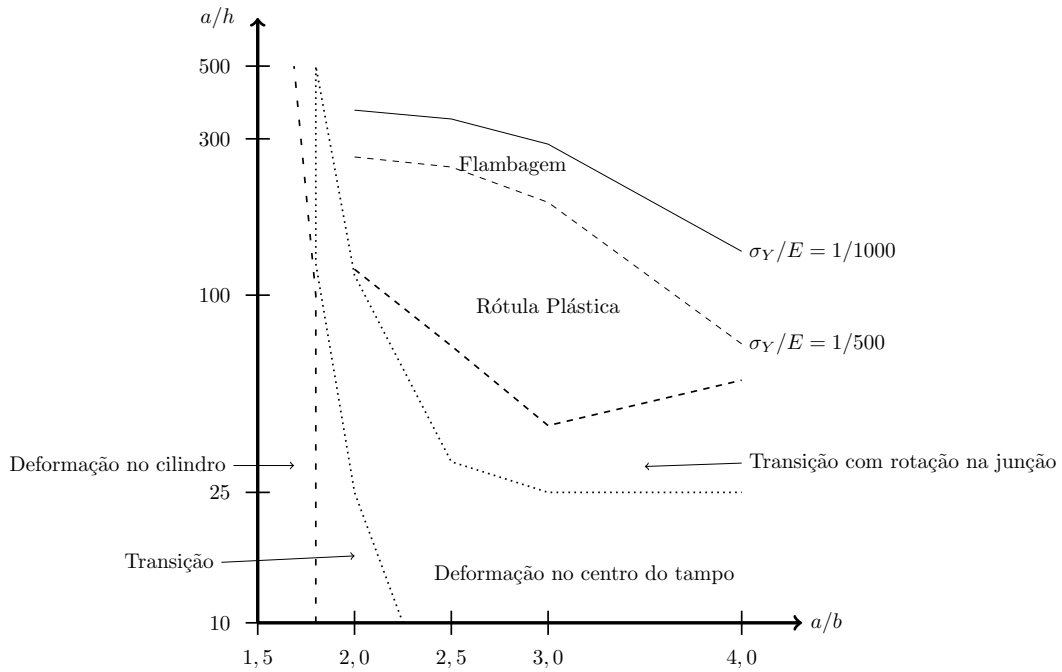


Figura 7.28: Diagrama de modos de colapso incluindo flambagem.

8

Conclusão

Comparando-se os resultados com soluções analíticas e com resultados de outras simulações encontradas na literatura pode-se concluir que os resultados estão fornecendo soluções coerentes. O erro para a pressão limite elástica foi menor que 0,1% e para a pressão de colapso foi menor que 1,5% em relação as soluções analíticas.

Comparando-se o resultado da simulação para os vasos de pressão estudados, obteve-se pressões limite elástica e de colapso maiores que a encontrada na literatura. A diferença pode ser atribuída a diferença nos métodos utilizados.

Foi observada ainda uma forte relação entre o modo de colapso e a pressão de colapso. A medida que a espessura diminuí novos modos de colapso podem surgir fazendo com que a pressão de colapso caia mais rápido que $O(h)$. Para geometrias simples como um cilindro longo e fechado ou uma esfera temos que a pressão de colapso é da ordem de $O(h)$ quando h é pequeno.

Apesar de que os resultados para algumas razões de aspecto sugerirem que P_C^* possa ser assintótica e que portanto poderia-se esperar uma pressão de colapso $P_C \propto h$ sabemos que existe risco de flambagem para toda razão de aspecto simulada neste trabalho. Resultados da literatura sugerem que não existe um limite assintótico positivo para P_B^* e que a pressão de colapso considerando-se flambagem assimétrica seria de ordem $O(h^{1.53})$.

Referências Bibliográficas

- [1] AGGARWAL, S.K.; NAYAK, G.C., "Elasto-plastic analysis as a basis for design of cylindrical pressure vessels with different end closures". *International Journal of Pressure Vessel and Piping* v. 10, n.4, p. 271-296, Jul. 1982.
- [2] AGGARWAL, S.K.; NAYAK, G.C.; SHANKAR, L., "Parametric Studies of Cylindrical Pressure Vessels with Different End Closures". *International Journal of Pressure Vessel and Piping* v. 6, n. 6, p.417-450, Nov. 1978.
- [3] ALAUZET, F.; FREY, P.; SAIAC, J. H., *Simulation Numérique en Géométries Complexes*. École Centrale Paris, Chatenay-Malabry, Version 4 mars 2011, 2011.
- [4] ANÔNIMO, "Buckling of Thin-Walled Doubly Curved Shells". *NASA Space Vehicle Design Criteria (Structures)* ,NASA SP-8032, 1969.
- [5] BATCHELOR, M.J.; TAYLOR, T.E., "Equivalent torispherical pressure vessel heads". *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 7, n. 3, p.229-244, Mai. 1979.
- [6] BICKELL, M. B.; RUIZ, C., *Pressure Vessel Design and Analysis*. Macmillan, First Edition, 1967.
- [7] COURANT R., *Differential and Integral Calculus Volume I*. Wiley, Second Edition, 1988.
- [8] GALLETLY, G.D., "A design procedure for preventing buckling in internally-pressurised thin fabricated torisphere". *Journal of Constructional Steel Research*, v. 2, n. 3, p. 11-21, 1982.
- [9] GERDEEN, J. C.; HUTULA, D. N., *Plastic collapse of ASME ellipsoidal head pressure vessels*. ASME, J. Engineering for Industry, 1970.
- [10] KAMACHOV, I. M. *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. MIR Publisher, First Edition, 1974.

- [11] LADOKUM, T.; FARHAD, N.; ZAREI, S., "Accidents in Pressure Vessels: Hazard Awareness". *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010* Vol II, 2010.
- [12] LUBLINER, J., *Plasticity Theory*. Disponível em [\[www.ce.berkeley.edu/~coby/plas/pdf/book.pdf\]](http://www.ce.berkeley.edu/~coby/plas/pdf/book.pdf) acessado em 30 de agosto de 2012, Revised Edition (PDF), 2006.
- [13] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R., *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson Makron Books, 2^a ed., 1988.
- [14] ŞANAL, Z., "Nonlinear analysis of pressure vessels: some examples". *International Journal of Pressure Vessel and Piping* v. 77,n. 12, p. 705-709, Out. 2000.
- [15] SPENCE, J.; NASH, D.H., "Milestone in Pressure Vessel Technology". *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, v. 81, n. 2, p.89-118, Fev. 2004.
- [16] STEIN, E.; BORST, R.; HUGHES, T. J. R., *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex First Edition, 2004.
- [17] VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T., *Thin Plates and Shells*. Marcel Dekker Inc., First Edition, 2001.
- [18] YEON D. J.; ROBINSON M. , "Numerical analysis of the elastic-plastic behaviour of pressure vessels with ellipsoidal and torispherical heads". *International Journal of Pressure Vessels and Piping* v. 65, n. 2 p. 147-156 , 1996.
- [19] ZOUAIN, Nestor; BORGES, Lavinia; SILVEIRA, José Luis. "An Algorithm for shakedown analysis with nonlinear yield functions". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* ,v. 191, p. 2463-2481, 2002.